ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 1ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $z = x + xi$, $x \in R^*$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \ldots + z^{4\nu}}{i z^2 + i^5 z^6 + i^9 z^{10} + \ldots + i^{4\nu-3} z^{4\nu-2}} = \operatorname{Im}(z^2)\ ,\ \nu \in N^*,\ x \in R^* - \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς που έχουν την παραπάνω μορφή και επαληθεύουν την εξίσωση:

$$z^3 - z^2 + \overline{z} + i = 0$$

γ) Αν z_1 , z_2 οι λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

i) $z_1^{\,4} = z_2^{\,4} = -1$

ii) $\dfrac{z_1^{\,2} + z_1}{z_2} + \dfrac{z_2^{\,2} + z_2}{z_1} = -2$

iii) $z_1^{\,2014} + z_2^{\,2014} = -2i$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$i^5 = i^{4\cdot1+1} = i\ ,\ i^9 = i^{4\cdot2+1} = i\ , \ldots\ ,\ i^{4\nu-3} = i^{4(\nu-1)+1} = i \quad \text{και}$$

$$z^2 = (x + xi)^2 = x^2 + 2x^2 i - x^2 = 2x^2 i$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \ldots + z^{4\nu}}{i z^2 + i^5 z^6 + i^9 z^{10} + \ldots + i^{4\nu-3} z^{4\nu-2}} =$$

$$= \frac{z^2 \cdot \left(z^2 + z^6 + z^{10} + \ldots + z^{4\nu-2}\right)}{i \cdot \left(z^2 + z^6 + z^{10} + \ldots + z^{4\nu-2}\right)} =$$

$$= \frac{z^2}{i} = \frac{2x^2 i}{i} = 2x^2 = \operatorname{Im}(z^2)$$

β) Είναι:

$$z^3 = z\cdot z^2 = (x + xi)\cdot 2x^2 i = -2x^3 + 2x^3 i$$

οπότε έχουμε:

$$z^3 - z^2 + \overline{z} + i = 0 \Leftrightarrow (-2x^3 + 2x^3 i) - 2x^2 i + (x - xi) + i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2x^3 + x) + (2x^3 - 2x^2 - x + 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^3 + x = 0 \\ 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ (2x^3 - x) - 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ -2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot(2x^2 - 1) = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{και} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

γ) i) Είναι:

- $z_1^{\,4} = (z_1^{\,2})^2 = \left(\frac{1}{2}(1+i)^2\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2i-1)^2 = \frac{1}{4}\cdot 4i^2 = -1 \qquad (1)$ και
- $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -z_1 \qquad (2)$

οπότε έχουμε:

$$z_2^{\,4} = (-z_1)^4 = z_1^{\,4} \overset{(1)}{=} -1$$

ii) Είναι:

$$\frac{z_1^{\,2} + z_1}{z_2} + \frac{z_2^{\,2} + z_2}{z_1} = \frac{z_1^{\,3} + z_1^{\,2} + z_2^{\,3} + z_2^{\,2}}{z_1 z_2} \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{z_1^{\,3} + z_1^{\,2} + (-z_1)^3 + (-z_1)^2}{z_1(-z_1)} =$$

$$= \frac{z_1^{\,3} + z_1^{\,2} - z_1^{\,3} + z_1^{\,2}}{-z_1^{\,2}} = \frac{2z_1^{\,2}}{-z_1^{\,2}} = -2$$

iii) Είναι:

- $z_1^{\,2014} = z_1^{\,4\cdot 503+2} = \left(z_1^{\,4}\right)^{503}\cdot z_1^{\,2} \overset{(1)}{=} (-1)^{503}\cdot z_1^{\,2} = -z_1^{\,2} =$

  $= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = -\frac{1}{2}(1+2i-1) = -\frac{1}{2}\cdot 2i = -i \qquad (3)$

- $z_2^{\,2014} \overset{(2)}{=} (-z_1)^{2014} = z_1^{\,2014} \overset{(3)}{=} -i$

οπότε έχουμε:

$$z_1^{\,2014} + z_2^{\,2014} = (-i) + (-i) = -2i$$

ΘΕΜΑ 2ο :

α) Να λύσετε την εξίσωση $4w^2 - 2w + 1 = 0$, $w \in C$

Θεωρούμε επιπλέον τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z_1| = 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad 4 \cdot \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 2 \quad (2)$$

β) Να αποδείξετε ότι $|z_2| = 2$

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0 , z_1 και z_2 είναι ορθογώνιο.

δ) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του παραπάνω τριγώνου.

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $4w^2 - 2w + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -12 < 0$ και οι λύσεις της είναι: $w = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$

β) Θέτουμε $\frac{z_1}{z_2} = w$. Επειδή $|z_1| = 1$ θα είναι $z_1 \neq 0$, άρα $w \neq 0$, οπότε η σχέση (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$4w + \frac{1}{w} = 2 \Leftrightarrow 4w^2 - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Άρα $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$, επομένως $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |z_2| = 2$

γ) Αν Ο , Α και Β είναι οι εικόνες των 0 , z_1 και z_2, τότε έχουμε:

$$(OA)^2 = |z_1|^2 = 1^2 = 1 \ , \ (OB)^2 = |z_2|^2 = 2^2 = 4$$

Επίσης είναι:

$$4z_1^2 + z_2^2 = 2z_1z_2 \Rightarrow (z_1 - z_2)^2 = -3z_1^2 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 3|z_1|^2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$$

Οπότε:

$$(AB) = \sqrt{3} \Rightarrow (AB)^2 = 3$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2 ,$$

οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

δ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ $\left(\hat{OAB} = 90^0\right)$ είναι $(OA) = \frac{(OB)}{2}$, οπότε θα έχουμε

$\hat{OBA} = 30^0$ και $\hat{AOB} = 60^0$

ΘΕΜΑ 3ο :

α) Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς w_1 και w_2 να αποδείξετε ότι ισχύει

$$|w_1+w_2|^2+|w_1-w_2|^2=2|w_1|^2+2|w_2|^2$$

β) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=1$

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

ii) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου για τους οποίους ισχύει $|z_1-z_2|=1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|z_1+z_2-4i|$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|w_1+w_2|^2+|w_1-w_2|^2=(w_1+w_2)\left(\overline{w_1+w_2}\right)+(w_1-w_2)\left(\overline{w_1-w_2}\right)=$$

$$=(w_1+w_2)\left(\overline{w_1}+\overline{w_2}\right)+(w_1-w_2)\left(\overline{w_1}-\overline{w_2}\right)=$$

$$=w_1\overline{w_1}+w_1\overline{w_2}+\overline{w_1}w_2+w_2\overline{w_2}+w_1\overline{w_1}-w_1\overline{w_2}-\overline{w_1}w_2+w_2\overline{w_2}=$$

$$=2w_1\overline{w_1}+2w_2\overline{w_2}=2|w_1|^2+2|w_2|^2$$

β) i) Έστω $z=x+yi$, $x, y\in R$ με εικόνα στο επίπεδο το σημείο $M(x, y)$

Είναι $|z-2i|=1\Leftrightarrow |z-(0+2i)|=1\Leftrightarrow (MK)=1$, όπου $M(z)$ η εικόνα του z και $K(0,2)$

Παρατηρούμε ότι η εικόνα Μ του μιγαδικού αριθμού z απέχει από το σταθερό σημείο $K(0,2)$ σταθερή απόσταση 1

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,2)$ και ακτίνα $\rho=1$, που έχει εξίσωση $|z-2i|=1$

ii) Επειδή οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=1$, θα ισχύει:

$$|z_1-2i|=1 \quad \text{και} \quad |z_2-2i|=1$$

Θέτοντας $w_1=z_1-2i$ και $w_2=z_2-2i$ στην ισότητα του (α) ερωτήματος διαδοχικά έχουμε:

$$|(z_1-2i)+(z_2-2i)|^2+|(z_1-2i)-(z_2-2i)|^2=2|z_1-2i|^2+2|z_2-2i|^2\Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2-4i|^2+|z_1-z_2|^2=2\cdot 1^2+2\cdot 1^2\Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2-4i|^2+1=4\Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2-4i|=\sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(3z-2i\right)^{2013}=\left(i\,\overline{z}-6\right)^{2013}$ **(1) και**
- $w=1+2\,\overline{z}\,i$ **(2)**

α) Να αποδείξετε ότι $|z|=2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u=\left(z-\frac{4}{z}\right)^{2014}$ είναι πραγματικός.

γ) Να αποδείξετε ότι $|u|\le 2^{4028}$

δ) Αν w_1 , w_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (2), τότε να αποδείξετε ότι $|w_1-w_2|\le 8$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left|(3z-2i)^{2013}\right|=\left|(i\overline{z}-6)^{2013}\right|\Leftrightarrow\left|(3z-2i)\right|^{2013}=\left|(i\overline{z}-6)\right|^{2013}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|(3z-2i)\right|=\left|(i\overline{z}-6)\right|\Leftrightarrow\left|(3z-2i)\right|^2=\left|(i\overline{z}-6)\right|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (3z-2i)(3\overline{z}+2i)=(i\overline{z}-6)(-iz-6)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 9|z|^2+6iz-6i\overline{z}+4=|z|^2+6iz-6i\overline{z}+36\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 8|z|^2=32\Leftrightarrow|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2$$

β) Είναι:

$$|z|=2\Rightarrow|z|^2=4\Rightarrow z\cdot\overline{z}=4\Rightarrow\frac{4}{z}=\overline{z}\qquad(3)$$

Οπότε αν $z=x+yi$ με $x,y\in R$, τότε έχουμε:

$$u=\left(z-\frac{4}{z}\right)^{2014}\overset{(3)}{=}(z-\overline{z})^{2014}=(2\,yi)^{2014}=$$

$$=(2\,y)^{2014}\cdot i^{2014}=(2\,y)^{2014}\cdot i^2=-(2\,y)^{2014}\in R$$

Επομένως $u\in R$

γ) Είναι:

$$|u|=\left|\left(z-\frac{4}{z}\right)^{2014}\right|\overset{(3)}{=}\left|(z-\overline{z})^{2014}\right|=\left|z-\overline{z}\right|^{2014}\le\left(|z|+|\overline{z}|\right)^{2014}=2^{4028}$$

Άρα:

$$|u|\le 2^{4028}$$

δ) Είναι $w_1 = 1 + 2\overline{z}_1 i$ και $w_2 = 1 + 2\overline{z}_2 i$, όπου οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 ικανοποιούν τη σχέση (1), οπότε θα ισχύει ότι $|z_1| = |z_2| = 2$. Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$, οπότε ισχύει $|z_1 - z_2| \le 4$

Είναι:

$$|w_1 - w_2| = |1 + 2\overline{z}_1 i - 1 - 2\overline{z}_2 i| = |2i(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)| =$$

$$= 2|i| \cdot |\overline{z}_1 - \overline{z}_2| = 2|\overline{z_1 - z_2}| = 2|z_1 - z_2| \le 2 \cdot 4 = 8$$

ΘΕΜΑ 5ο :

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $|z^2 - 2zi| + 2|z| = 2 + |\overline{z} + 2i|$ είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$

β) Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός του οποίου η εικόνα ανήκει στον κύκλο C. Να αποδείξετε ότι:

i) $|w + 3z| + |2w + 5z| \ge \dfrac{1}{2}$ για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό w

ii) $\sqrt{2} \le |z - 1| + |z^2 + 1| \le 4$

γ) Έστω u, v δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός z_o με εικόνα στον κύκλο C, ώστε να ισχύει $|z_o^2 + uz_o + v| \ge 1$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|z^2 - 2zi| + 2|z| = 2 + |\overline{z} + 2i| \Leftrightarrow$$

$$|z| \cdot |z - 2i| + 2|z| = 2 + |\overline{z - 2i}| \Leftrightarrow$$

$$|z| \cdot |z - 2i| - |z - 2i| + 2|z| - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|z - 2i|(|z| - 1) + 2(|z| - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(|z| - 1)(|z - 2i| + 2) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \quad (1),$$

αφού $|z - 2i| + 2 \ne 0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$ που έχει κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$

β) i) Για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό w έχουμε:

$$|w + 3z| + |2w + 5z| = |w + 3z| + 2\left|w + \frac{5}{2}z\right| \ge$$

$$\ge |w + 3z| + \left|w + \frac{5}{2}z\right| \ge \left|(w + 3z) - (w + \frac{5}{2}z)\right| = \frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Επομένως

$$|w + 3z| + |2w + 5z| \ge \frac{1}{2}$$

ii) Είναι:

$$|z-1|+|z^2+1|\le|z|+1+|z|^2+1\overset{(1)}{=}4$$

οπότε απομένει να αποδείξουμε το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισοτικής σχέσης.

Ισχύει:

$$|z-1|+|z^2+1|\ge|z-1+z^2+1|=|z(z+1)|=|z|\cdot|z+1| \quad (2)$$

Επειδή $|z|=1$ από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $|z-1|+|z^2+1|\ge|z+1|$ (3)

Είναι προφανές ότι $|z-1|+|z^2+1|\ge|z-1|$ (4)

Αν $z=x+yi$ με $x,y\in[-1,1]$ τότε έχουμε:

- $|z|=1\Rightarrow|z|^2=1\Rightarrow x^2+y^2=1$ (5)
- $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2+2x+1}\overset{(5)}{=}\sqrt{1+2x+1}=\sqrt{2(1+x)}=\sqrt{2}\sqrt{1+x}$ (6)
- $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+1}\overset{(5)}{=}\sqrt{1-2x+1}=\sqrt{2(1-x)}=\sqrt{2}\sqrt{1-x}$ (7)

Από τις σχέσεις (3) και (6) προκύπτει ότι:

$$|z-1|+|z^2+1|\ge\sqrt{2}\sqrt{1+x} \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (4) και (7) προκύπτει ότι :

$$|z-1|+|z^2+1|\ge\sqrt{2}\sqrt{1-x} \quad (9)$$

Αν $x\in[0,1]$ από τη σχέση (8) έχουμε:

$$|z-1|+|z^2+1|\ge\sqrt{2}$$

Αν $x\in[-1,0]$ από τη σχέση (9) έχουμε:

$$|z-1|+|z^2+1|\ge\sqrt{2}$$

Επομένως είναι:

$$\sqrt{2}\le|z-1|+|z^2+1|\le 4$$

γ) Έστω ότι για κάθε $z\in C$ με $|z|=1$ ισχύει:

$$|z^2+uz+v|<1 \quad (10)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε διαδοχικά $z=1$ και $z=-1$ έχουμε:

$$|1+u+v|<1 \quad \text{και} \quad |1-u+v|<1$$

οπότε

$$2>|1+u+v|+|1-u+v|\ge|(1+u+v)+(1-u+v)|\Rightarrow$$

$$2>|2+2v|\Rightarrow 2>2|1+v|\Rightarrow|v+1|<1 \quad (11)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε διαδοχικά $z=i$ και $z=-i$ έχουμε:

$$|-1+ui+v|<1 \quad \text{και} \quad |-1-ui+v|<1$$

οπότε

$$2>|-1+ui+v|+|-1-ui+v|\ge|(-1+ui+v)+(-1-ui+v)|\Rightarrow$$

$$2>|-2+2v|\Rightarrow 2>2|-1+v|\Rightarrow|v-1|<1 \quad (12)$$

Από τις σχέσεις (11) και (12) συμπεραίνουμε ότι:

$$2>|v+1|+|v-1|\ge|(v+1)-(v-1)|\Rightarrow 2>2$$

που είναι άτοπο.

Άρα υπάρχει $z_o\in C$ με $|z_o|=1$, ώστε να ισχύει $|z_o^2+uz_o+v|\ge 1$

ΘΕΜΑ 6ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύει:

- $|z-3-3i| = 2\left|\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{25}\right|$ **και**
- $2|\bar{w}-3+3i| = |iz+3-3i|$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z. Στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του Re(z)

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w

γ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w των ερωτημάτων (α) και (β) να αποδείξετε ότι:

$$1 \le |z-w| \le 3 \quad \text{και} \quad 6\sqrt{2}-3 \le |z+w| \le 6\sqrt{2}+3$$

δ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$k = (z_1 - z_2)\cdot\left(\frac{1}{z_1-3-3i} - \frac{1}{z_2-3-3i}\right)$$

είναι πραγματικός και ισχύει $0 \le k \le 4$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left|\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{25}\right| = \left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|^{25} = \left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^{25} = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^{25} = 1^{25} = 1$$

οπότε

$$|z-3-3i| = 2\left|\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{25}\right| \Leftrightarrow |z-(3+3i)| = 2$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3\,,\,3)$ και ακτίνα $\rho = 2$

Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει $|\text{Re}(z) - x_\kappa| \le \rho$, όπου $x_\kappa = 3$ η τετμημένη του κέντρου του κύκλου $(K\,,\,\rho)$ και $\rho = 2$

Είναι:

$$|\text{Re}(z) - x_\kappa| \le \rho \Leftrightarrow x_\kappa - \rho \le \text{Re}(z) \le x_\kappa + \rho \Leftrightarrow$$

$$3-2 \le \text{Re}(z) \le 3+2 \Leftrightarrow 1 \le \text{Re}(z) \le 5$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του Re(z) είναι το 1 και προκύπτει αν $z = 1+3i$, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι το 5 και προκύπτει αν $z = 5+3i$

Σημείωση:

Είναι:

$$|z-(3+3i)| = 2 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$$

οπότε

$$(x-3)^2 \le 4 \Leftrightarrow |x-3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x-3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του Re(z) είναι το 1 και προκύπτει αν $z = 1+3i$, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι το 5 και προκύπτει αν $z = 5+3i$

β) Είναι:

$$2\left|\overline{w}-3+3i\right|=\left|iz+3-3i\right|\Leftrightarrow 2\left|\overline{(w-3-3i)}\right|=\left|i(z-3-3i)\right|\Leftrightarrow$$

$$2|w-3-3i|=|i|\cdot|z-3-3i|\overset{\alpha)}{\Leftrightarrow}2|w-3-3i|=2\Leftrightarrow|w-3-3i|=1\Leftrightarrow|w-(3+3i)|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(3\,,\,3)$ και ακτίνα $\rho_1=1$

γ) **1^{ος} τρόπος:**

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w των ερωτημάτων (α) και (β) έχουμε:

$$|z-w|=\left|\left(z-(3+3i)\right)-\left(w-(3+3i)\right)\right|=|u-v|$$

όπου

$$u=z-(3+3i)\ \text{ και }\ v=w-(3+3i)\ \text{ με }\ |u|=2\ \text{ και }\ |v|=1$$

Ισχύει:

$$|z-w|=|u-v|\le|u|+|v|=2+1=3$$

και

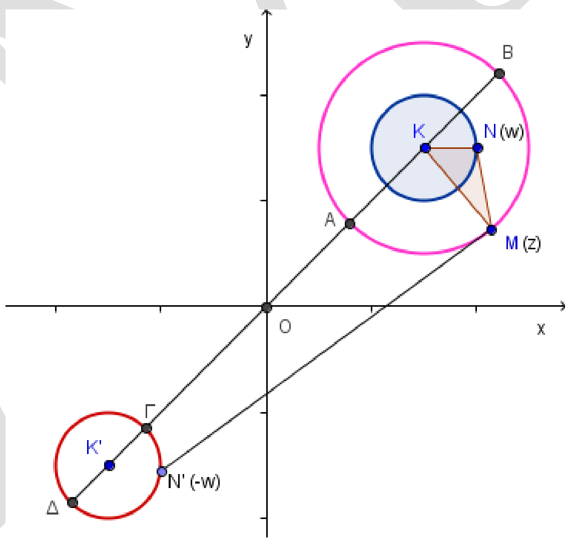
$$|z-w|=|u-v|\ge\big||u|-|v|\big|=|2-1|=1$$

Άρα

$$1\le|z-w|\le3$$

2^{ος} τρόπος: Γεωμετρικά (Υπόδειξη)

Μπορούμε να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα και **γεωμετρικά** μέσω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΚΜΝ του παρακάτω σχήματος.



1^{ος} τρόπος:

Είναι:

$$|z+w|=\left|\left(z-(3+3i)\right)+\left(w-(3+3i)\right)+6(1+i)\right|=|u+v+6(1+i)|$$

Ισχύει:

$$|z+w|=|u+v+6(1+i)|\le|u|+|v|+|6(1+i)|=2+1+6\sqrt{2}=6\sqrt{2}+3$$

και

$$|z+w|=\left|(u+v)+6(1+i)\right|\ge\big||6(1+i)|-|u+v|\big|\ge\big||6(1+i)|-(|u|+|v|)\big|=\left|6\sqrt{2}-3\right|=6\sqrt{2}-3$$

Άρα

$$6\sqrt{2}-3\le|z+w|\le6\sqrt{2}+3$$

2^{ος} τρόπος : Γεωμετρικά (Υπόδειξη)

Είναι:

$$|z+w| = |z-(-w)| = (MN') \le (B\Delta) = 6\sqrt{2}+3$$

και

$$|z+w| = |z-(-w)| = (MN') \ge (A\Gamma) = 6\sqrt{2}-3, \text{ διότι } \dots$$

Άρα …

δ) Θέτουμε $u = z-(3+3i)$, τότε έχουμε:

$$|u| = |z-(3+3i)| = 2 \qquad (1)$$

και

$$|u| = 2 \Leftrightarrow |u|^2 = 4 \Leftrightarrow u\cdot\bar{u} = 4 \Leftrightarrow \bar{u} = \frac{4}{u} \qquad (2)$$

Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, τότε:

$$k = (z_1 - z_2)\left(\frac{1}{z_1-3-3i} - \frac{1}{z_2-3-3i}\right) =$$

$$= \big((z_1-3-3i)-(z_2-3-3i)\big)\cdot\left(\frac{1}{z_1-3-3i} - \frac{1}{z_2-3-3i}\right) =$$

$$= (u_1-u_2)\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right) = \frac{1}{4}(u_1-u_2)\left(\frac{4}{u_1}-\frac{4}{u_2}\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}(u_1-u_2)(\bar{u}_1-\bar{u}_2) = \frac{1}{4}(u_1-u_2)\left(\overline{u_1-u_2}\right) = \frac{1}{4}|u_1-u_2|^2$$

Άρα ο αριθμός k είναι πραγματικός και ισχύει:

- $k = \frac{1}{4}|u_1-u_2|^2 \ge 0$ και
- $k = \frac{1}{4}|u_1-u_2|^2 \le \frac{1}{4}\left(|u_1|+|u_2|\right)^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{4}(2+2)^2 = 4$

Δηλαδή $0 \le k \le 4$

ΘΕΜΑ 7ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|iz+8| = 2|2iz+1|$$

α) **Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$**

β) **Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 είναι σημεία του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου και ισχύει $|z_1 + xz_2| > \sqrt{3}$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι $|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| < 2$**

γ) **Έστω πραγματικός αριθμός α με $\alpha \in (-1,1)$. Αν z μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:**

$$z^4 + 2\alpha z^3 + 8\alpha z + 16 = 0 \qquad (1)$$

να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z:

i) Ανήκει στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος

ii) Δεν ανήκει στους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|iz+8|=2|2iz+1| \Leftrightarrow |iz+8|^2=4|2iz+1|^2 \Leftrightarrow$$

$$(iz+8)\left(\overline{iz+8}\right)=4(2iz+1)\left(\overline{2iz+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$(iz+8)(-i\overline{z}+8)=4(2iz+1)(-2i\overline{z}+1) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+8iz-8i\overline{z}+64=16|z|^2+8iz-8i\overline{z}+4 \Leftrightarrow$$

$$15|z|^2=60 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$

β) Είναι:

$$|z_1|=2 \quad \text{και} \quad |z_2|=2$$

οπότε έχουμε:

$$|z_1+xz_2|>\sqrt{3} \Leftrightarrow |z_1+xz_2|^2>3 \Leftrightarrow (z_1+xz_2)\cdot\left(\overline{z_1+xz_2}\right)>3 \Leftrightarrow$$

$$(z_1+xz_2)\cdot(\overline{z}_1+x\overline{z}_2)>3 \Leftrightarrow |z_1|^2+xz_1\overline{z}_2+x\overline{z}_1z_2+x^2|z_2|^2>3 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2)\cdot x+1>0 \Leftrightarrow 4x^2+\left(z_1\overline{z}_2+\overline{z_1\overline{z}_2}\right)\cdot x+1>0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\cdot x+1>0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επομένως για τη διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\cdot x+1$ ισχύει:

$$\Delta<0 \Leftrightarrow 4\left(\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\right)^2-16<0 \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\right)^2<4 \Leftrightarrow \left|\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)\right|<2$$

γ) i) 1ος τρόπος:

Αν z μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει η σχέση (1), τότε έχουμε:

$$z^4+2\alpha z^3+8\alpha z+16=0 \Leftrightarrow z^3(z+2\alpha)=-8(\alpha z+2)$$

Άρα

$$|z|^3\cdot|z+2\alpha|=8|\alpha z+2| \qquad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $|z|>2$, τότε $|z|^3>8$ και από τη σχέση (2) έχουμε:

$$|z+2\alpha|<|\alpha z+2| \Leftrightarrow |z+2\alpha|^2<|\alpha z+2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z+2\alpha)\left(\overline{z+2\alpha}\right)<(\alpha z+2)\left(\overline{\alpha z+2}\right) \Leftrightarrow$$

$$(z+2\alpha)(\overline{z}+2\alpha)<(\alpha z+2)(\alpha\overline{z}+2) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+2\alpha z+2\alpha\overline{z}+4\alpha^2<\alpha^2|z|^2+2\alpha z+2\alpha\overline{z}+4 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2-1)|z|^2-4(\alpha^2-1)>0 \Leftrightarrow (\alpha^2-1)\left(|z|^2-4\right)>0 \qquad (3)$$

Επειδή $\alpha\in(-1,1)$ το $\alpha^2-1<0$ και από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:

$$|z|^2-4<0 \Rightarrow |z|^2<4 \Rightarrow |z|<2, \text{ που είναι άτοπο, αφού } |z|>2$$

Αν υποθέσουμε ότι $|z|<2$, τότε ομοίως προκύπτει $|z|>2$, που είναι επίσης άτοπο.

Επομένως υποχρεωτικά ισχύει ότι $|z|=2$, άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) ανήκουν στο κύκλο $C: x^2+y^2=4$, δηλαδή στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος.

2ος τρόπος:

Αν υποθέσουμε ότι $z=0$, τότε από την (1) έχουμε $16=0$, που είναι άτοπο.

Για $z\neq 0$ έχουμε:

$$z^4+2\alpha z^3+8\alpha z+16=0 \overset{\div z^2\neq 0}{\Leftrightarrow} z^2+2\alpha z+\frac{8\alpha}{z}+\frac{16}{z^2}=0 \Leftrightarrow \left(z^2+\frac{16}{z^2}\right)+2\alpha\left(z+\frac{4}{z}\right)=0 \quad (4)$$

Αν θέσουμε $z+\frac{4}{z}=u$ (5), τότε έχουμε:

$$\left(z+\frac{4}{z}\right)^2=u^2 \Rightarrow z^2+2z\cdot\frac{4}{z}+\frac{16}{z^2}=u^2 \Rightarrow z^2+\frac{16}{z^2}=u^2-8,$$

οπότε η (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$(u^2-8)+2\alpha u=0 \Leftrightarrow u^2+2\alpha u-8=0 \quad (6)$$

Είναι:

$$\Delta=4\alpha^2+32=4(\alpha^2+8)>0$$

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης (6) είναι:

$$u=\frac{-2\alpha\pm 2\sqrt{\alpha^2+8}}{2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+8} \quad (7)$$

Επομένως η εξίσωση (5) ισοδύναμα γράφεται:

$$z^2-uz+4=0 \overset{(7)}{\Leftrightarrow} z^2+\left(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+8}\right)z+4=0 \quad (8)$$

Είναι:

$$\Delta=\left(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+8}\right)^2-16=\alpha^2+\alpha^2+8\pm 2\alpha\sqrt{\alpha^2+8}-16=2\left(\alpha^2-4\pm\alpha\sqrt{\alpha^2+8}\right)$$

Από τη σχέση $-1<\alpha<1$ έχουμε:

- $0\leq\alpha^2<1\Rightarrow -4\leq\alpha^2-4<-3$
- $-\sqrt{\alpha^2+8}<\alpha\sqrt{\alpha^2+8}<\sqrt{\alpha^2+8} \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha^2+8}<-\alpha\sqrt{\alpha^2+8}<\sqrt{\alpha^2+8}$

οπότε

$$\alpha^2-4+\alpha\sqrt{\alpha^2+8}<-3+\sqrt{\alpha^2+8}<-3+3=0$$

και

$$\alpha^2-4-\alpha\sqrt{\alpha^2+8}<-3+\sqrt{\alpha^2+8}<-3+3=0$$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\Delta<0$

Οπότε οι ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης (8) είναι μιγαδικοί συζυγείς με $z_1\cdot z_2=4$

Επομένως έχουμε:

$$z_1\cdot z_2=4 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z}_1=4 \Leftrightarrow |z_1|^2=4 \Leftrightarrow |z_1|=2$$

Άρα για κάθε ρίζα z της εξίσωσης ισχύει ότι $|z|=2$, οπότε οι εικόνες όλων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) ανήκουν στο κύκλο $C: x^2+y^2=4$, δηλαδή στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος.

ii) • Αν $y=0$, τότε $z=x+0\cdot i=x\in R$ (πραγματικός αριθμός) και επειδή $|z|=2\Rightarrow z=\pm 2$

Για $z=2$ έχω:

$$2^4+2\alpha\cdot 2^3+8\alpha\cdot 2+16=0\Leftrightarrow \alpha=-1$$, που είναι άτοπο, αφού $\alpha\in(-1,1)$

Για $z=-2$ έχω:

$$(-2)^4+2\alpha\cdot(-2)^3+8\alpha\cdot(-2)+16=0\Leftrightarrow \alpha=1$$, που είναι άτοπο, αφού $\alpha\in(-1,1)$

Άρα $y\neq 0$

• Αν $x=0$, τότε $z=0+yi=yi\in I$ (φανταστικός αριθμός) και επειδή $|z|=2\Rightarrow z=\pm 2i$

Για $z=2i$ έχω:

$$(2i)^4+2\alpha\cdot(2i)^3+8\alpha\cdot 2i+16=0\Leftrightarrow$$

$$2^4i^4+2\alpha\cdot 2^3i^3+8\alpha\cdot 2i+16=0\Leftrightarrow$$

$$16-16\alpha i+16\alpha i+16=0\Leftrightarrow 32=0$$, που είναι άτοπο.

Για $z=-2i$ έχω:

$$(-2i)^4+2\alpha\cdot(-2i)^3+8\alpha\cdot(-2i)+16=0\Leftrightarrow$$

$$2^4i^4+2\alpha\cdot(-2)^3i^3-8\alpha\cdot 2i+16=0\Leftrightarrow$$

$$16+16\alpha i-16\alpha i+16=0\Leftrightarrow 32=0$$, που είναι άτοπο.

Άρα $x\neq 0$

Επομένως οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) είναι της μορφής $x+yi$ με $xy\neq 0$

ΘΕΜΑ 8ο :

Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[1,2]$ με $f(1)=-1$ και $f(2)=1$. Θεωρούμε επίσης τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=|z|$. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι η ευθεία y=1

β) Υπάρχει ακριβώς μια τιμή του Re(z) τέτοια, ώστε ο αριθμός $w=z^2-\frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός.

γ) $-1\le f(|z|^2)\le 1$, αν $Re(z)\in[0,1]$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $z=x+yi$, $x,y\in R$ με εικόνα στο επίπεδο το σημείο $M(x,y)$.

Είναι:

$$|z-2i|=|z|\Leftrightarrow|x+yi-2i|=|x+yi|\Leftrightarrow|x+(y-2)i|=|x+yi|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=x^2+y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2\Leftrightarrow -4y+4=0\Leftrightarrow 4y=4\Leftrightarrow y=1$$

β) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z είναι σημεία της ευθείας $y=1$, άρα είναι $z=x+i$, $x\in R$

Είναι:

$$w=z^2-\frac{1}{z}=(x+i)^2-\frac{1}{x+i}=(x+i)^2-\frac{x-i}{(x+i)(x-i)}=$$

$$=x^2+2xi-1-\frac{x-i}{x^2+1}=\left(x^2-1-\frac{x}{x^2+1}\right)+\left(2x+\frac{1}{x^2+1}\right)i$$

Είναι:

$$w\in R\Leftrightarrow 2x+\frac{1}{x^2+1}=0\ \Leftrightarrow\ 2x^3+2x+1=0\qquad(1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (1) έχει μια ακριβώς ρίζα ως προς x στο R, αφού $x=\mathrm{Re}(z)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2x^3+2x+1$, $x\in R$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=6x^2+2$, $x\in R$

Για κάθε $x\in R$ είναι $g'(x)>0$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R

Έχουμε:

- g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R
- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+2x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$ και

  $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+2x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι $g(R)=R$, οπότε υπάρχει ένα $\xi\in R$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0$ και μάλιστα είναι μοναδικό, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Έχουμε $|z|^2=x^2+1$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $-1\le f(x^2+1)\le 1$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[1,2]$ με $f(1)<f(2)$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\mathrm{Re}(z)\in[0,1]$, οπότε έχουμε:

$$0\le x\le 1\Rightarrow 0\le x^2\le 1\Rightarrow 1\le x^2+1\le 2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}$$

$$f(1)\le f(x^2+1)\le f(2)\Rightarrow -1\le f(x^2+1)\le 1$$

ΘΕΜΑ 9ο :

I) Να αποδείξετε ότι για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z , w ισχύει η σχέση:

$$|z-w|^2=|z|^2+|w|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{w})$$

II) Δίνονται:

- **η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(R)=R$ και**
- **οι μιγαδικοί αριθμοί $z=3+f(2)i$ και $w=f^{-1}(2)+3i$**

Αν ισχύει $|z|^2 + |w|^2 = 2\text{Re}(z\overline{w})$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $z = w$

β) Οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = f(2x - f(x)) - x$, $x \in R$, είναι γνησίως φθίνουσες.

γ) Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow g(x) = 0,\ x \in R$$

δ) Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 4)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοια, ώστε $3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$

ΛΥΣΗ

Ι) Είναι:

$$|z-w|^2 = (z-w)\left(\overline{z-w}\right) = (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w} =$$

$$= |z|^2 + |w|^2 - (z\overline{w} + \overline{z}w) = |z|^2 + |w|^2 - \left(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}\right) = |z|^2 + |w|^2 - 2\text{Re}(z\overline{w}) \quad (1)$$

ΙΙ) α) Είναι:

$$|z|^2 + |w|^2 = 2\text{Re}(z\overline{w}) \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 - 2\text{Re}(z\overline{w}) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow |z-w|^2 = 0 \Leftrightarrow |z-w| = 0 \Leftrightarrow z - w = 0 \Leftrightarrow z = w$$

β) Είναι:

$$z = w \Leftrightarrow 3 + f(2)i = f^{-1}(2) + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f^{-1}(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, επομένως ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα.

  Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

  $$2 < 3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(2) < f(3) \Rightarrow 3 < 2$$

  που είναι άτοπο. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Για τυχαία $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) < -f(x_2)$

  Είναι:

  $$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 < 2x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2x_1 - f(x_1) < 2x_2 - f(x_2) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$$

  $$\Rightarrow f\left(2x_1 - f(x_1)\right) > f\left(2x_2 - f(x_2)\right)$$

  Είναι:

  $$\begin{cases} f\left(2x_1 - f(x_1)\right) > f\left(2x_2 - f(x_2)\right) \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f\left(2x_1 - f(x_1)\right) - x_1 > f\left(2x_2 - f(x_2)\right) - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

  Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow f\left(2x - f(x)\right) = x \Leftrightarrow f\left(2x - f(x)\right) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

δ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1, 4]$, οπότε θα υπάρχει $\xi_1 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}\Rightarrow f'(\xi_1)=\frac{f(4)-f(1)}{3}\Rightarrow 3f'(\xi_1)=f(4)-f(1)\qquad(2)$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g(x)=f\big(2x-f(x)\big)-x$$

Η συνάρτηση $2x-f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε η συνάρτηση $f\big(2x-f(x)\big)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[2,3]$, οπότε θα υπάρχει $\xi_2\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi_2)=\frac{g(3)-g(2)}{3-2}\Rightarrow g'(\xi_2)=g(3)-g(2)\qquad(3)$$

Για $x=2$ είναι $g(2)=f\big(2\cdot 2-f(2)\big)-2=f(4-3)-2=f(1)-2$, οπότε $f(1)-g(2)=2\quad(4)$

Για $x=3$ είναι $g(3)=f\big(2\cdot 3-f(3)\big)-3=f(6-2)-3=f(4)-3$, οπότε $f(4)-g(3)=3\quad(5)$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$3f'(\xi_1)-g'(\xi_2)=\big(f(4)-f(1)\big)-\big(g(3)-g(2)\big)\Rightarrow$$

$$3f'(\xi_1)-g'(\xi_2)=\big(f(4)-g(3)\big)-\big(f(1)-g(2)\big)\overset{(4),(5)}{\Rightarrow}$$

$$3f'(\xi_1)-g'(\xi_2)=3-2\Rightarrow 3f'(\xi_1)=g'(\xi_2)+1$$

ΘΕΜΑ 10ο :

α) Να λύσετε την εξίσωση $z^2-6\text{συν}\theta\cdot z+5\text{συν}^2\theta+4=0$, όπου $\theta\in R$

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της εξίσωσης κινούνται πάνω στην έλλειψη $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ για τις διάφορες τιμές του $\theta\in R$

γ) Για $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$

δ) Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$ και z_1 η ρίζα της εξίσωσης με $\text{Im}(z_1)>0$, να βρείτε τιμές του $\nu\in N^*$, ώστε $z_1^\nu\in R$

ε) Αν $A(2,3)$ και C το τμήμα της έλλειψης που ορίζεται από τα σημεία (x,y) με $x\in[-1,2]$ και $y>0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C, που απέχει από το Α ελάχιστη απόσταση και ένα τουλάχιστον σημείο της C που απέχει από το Α μέγιστη απόσταση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\Delta=\left(-6\sigma\upsilon\nu\theta\right)^2-4\left(5\sigma\upsilon\nu^2\theta+4\right)=36\sigma\upsilon\nu^2\theta-20\sigma\upsilon\nu^2\theta-16=-16\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)=-16\eta\mu^2\theta$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$z_{1,2}=\frac{6\sigma\upsilon\nu\theta\pm i4\eta\mu\theta}{2}=3\sigma\upsilon\nu\theta\pm 2\eta\mu\theta i$$

β) Αν $z_{1,2}=x+yi\ ,x,y\in R$, τότε:

$$\begin{cases} x=3\sigma\upsilon\nu\theta \\ y=\pm 2\eta\mu\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3}=\sigma\upsilon\nu\theta \\ \dfrac{y}{\pm 2}=\eta\mu\theta \end{cases} \qquad (1)$$

Είναι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Επομένως οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της εξίσωσης κινούνται πάνω στην έλλειψη $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, για τις διάφορες τιμές του $\theta\in R$

γ) Έχουμε:

$$\left|z_1-z_2\right|=\left|4i\eta\mu\theta\right|=4\eta\mu\theta\ ,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

Είναι:

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le\eta\mu\theta\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 0\le 4\eta\mu\theta\le 2\sqrt{2}$$

Άρα

$$\left|z_1-z_2\right|\le 2\sqrt{2}\ ,\ \text{οπότε η μέγιστη τιμή του } \left|z_1-z_2\right| \text{ είναι } 2\sqrt{2}$$

δ) Για $\theta=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $z_1=2i$, άρα $z_1^{\nu}=2^{\nu}i^{\nu}$

Για $\nu=4\kappa$, $\kappa\in N^*$ έχουμε $z_1^{\nu}=2^{\nu}\in R$

Για $\nu=4\kappa+1$, $\kappa\in N^*$ έχουμε $z_1^{\nu}=2^{\nu}i\notin R$

Για $\nu=4\kappa+2$, $\kappa\in N^*$ έχουμε $z_1^{\nu}=-2^{\nu}\in R$

Για $\nu=4\kappa+3$, $\kappa\in N^*$ έχουμε $z_1^{\nu}=-2^{\nu}i\notin R$

Άρα $\nu=2\mu$, $\mu\in N^*$

ε) Έχουμε:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow 4x^2+9y^2=36\Leftrightarrow y^2=\frac{36-4x^2}{9}\Leftrightarrow y^2=\frac{4\left(9-x^2\right)}{9}\overset{y>0}{\Leftrightarrow} y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

Αν $M(x,y)$ σημείο του C ,τότε:

$$d(M,A)=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}-3\right)^2}$$

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}-3\right)^2}$ είναι συνεχής στο $[-1,2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, άρα από το Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[-1,2]$ τέτοια, ώστε:

$$m=f(x_1) \text{ και } M=f(x_2), \text{ με } m\le f(x)\le M$$

Άρα υπάρχουν σημεία του C, που απέχουν ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από το σημείο Α.

ΘΕΜΑ 11ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί z , w και u, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $|z-1|=\text{Re}(z)+1$ **(1)**
- $|w-2|^2-|w-2i|^2=8$ **(2)**
- $w\cdot u=2$ **(3)**

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $x-y+2=0$

γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο του $O(0,0)$

δ) Να βρείτε σημείο της παραβολής, το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε)

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός z με $z=u$ και $\text{Im}(z)<0$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ και από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$|x+yi-1|=x+1\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1\overset{x>-1}{\Leftrightarrow}(x-1)^2+y^2=(x+1)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2=x^2+2x+1\Leftrightarrow y^2=4x\,,\quad x\ge 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$

β) Θέτουμε $w=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και από τη σχέση (2) ισοδύναμα έχουμε:

$$|\alpha+\beta i-2|^2-|\alpha+\beta i-2i|^2=8\Leftrightarrow(\alpha-2)^2+\beta^2-\left(\alpha^2+(\beta-2)^2\right)=8\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-4\alpha+4+\beta^2-\alpha^2-\beta^2+4\beta-4=8\Leftrightarrow-4\alpha+4\beta-8=0\Leftrightarrow\alpha-\beta+2=0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y+2=0$

γ) Θέτουμε $u = x + yi$ με $x, y \in R$ και από τη σχέση (3) ισοδύναμα έχουμε:

$$w = \frac{2}{u} \overset{u \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta i = \frac{2}{x+yi} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \frac{2(x-yi)}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{2x}{x^2+y^2} \text{ και } \beta = -\frac{2y}{x^2+y^2} \right)$$

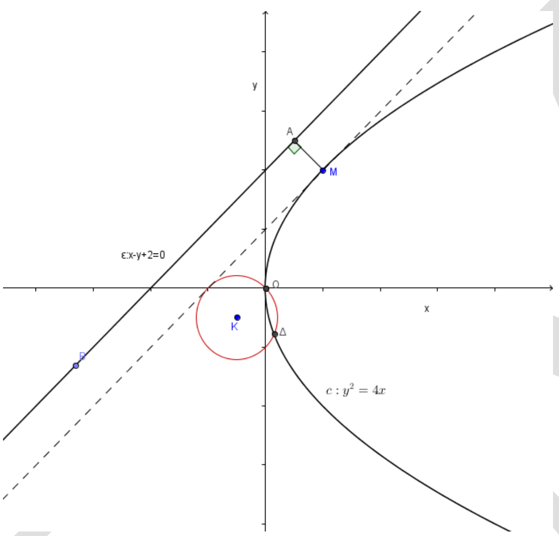
Όμως $\alpha - \beta + 2 = 0$, άρα έχουμε:

$$\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + x + y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Για $x = y = 0$ επαληθεύεται η εξίσωση, όμως τότε $u = 0$, άτοπο. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο του $O(0,0)$

δ) 1ος τρόπος: Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο της παραβολής ,τότε η εξίσωση εφαπτομένης της στο M είναι:



$$yy_1 = 2(x + x_1) \Leftrightarrow 2x - y_1 y + 2x_1 = 0 \text{ με } \lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{2}{y_1}$$

Αν η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) τότε:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2 \text{ και } x_1 = 1$$

Άρα το σημείο $M(1,2)$, απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε), (απόσταση παραλλήλων ευθειών).

2ος τρόπος:

Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

$$d(M,\varepsilon) = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left|\frac{y^2}{4} - y + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|y^2 - 4y + 8|}{4\sqrt{2}} = \frac{y^2 - 4y + 8}{4\sqrt{2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(y) = y^2 - 4y + 8$, $y \in R$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $y \in R$ έχουμε:

$$f'(y) = 2y - 4$$

Είναι:

- $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$
- $f'(y) > 0 \Leftrightarrow 2y - 4 > 0 \Leftrightarrow y > 2$

Το πρόσημο της $f'(y)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(y)$	$-$	0	$+$
$f(y)$	$\searrow$		$\nearrow$
		ελαχ.	

Η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή για $y = 2$. Για $y = 2$ είναι $x = 1$, οπότε το σημείο $M(1,2)$ απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε).

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2+y^2+x+y=0 \end{cases} \overset{y<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} y = -2\sqrt{x} & (4) \\ x^2+5x-2\sqrt{x}=0 & (5) \end{cases}$$

Επειδή $y<0$ από τη σχέση (4) συμπεραίνουμε ότι $x>0$

Για $x>0$ η σχέση (5) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}}+5\frac{x}{\sqrt{x}}-2=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2$, $x>0$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

Είναι:

$$g'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2\right)=-2$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2\right)=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι $g(A)=(-2,+\infty)$

Το $0\in g(A)$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο Α, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $A=(0,+\infty)$

Συνεπώς υπάρχει μοναδικός μιγαδικός z με $z=w$ και $\mathrm{Im}(z)<0$

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ όπου $\alpha,\beta,\gamma\in R$ για τους οποίους ισχύει $\beta^2<3\alpha\gamma$

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=0$ έχει δύο μιγαδικές ρίζες z_1 , z_2

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός και μικρότερος της μονάδας.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=xe^x$, $x>0$. Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,+\infty)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f(x_o)\cdot g(x_o)=\alpha$

ii) Η συνάρτηση $h(x)=\frac{g(x)f(x_o)-\alpha}{f(x_o)(x-x_o)}$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha \neq 0$, διότι αν ήταν $\alpha = 0$, τότε από τη σχέση $\beta^2 < 3\alpha\gamma$ προκύπτει $\beta^2 < 0$ που είναι άτοπο, αφού $\beta \in R$. Άρα το $f(x)$ είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού, για τη διακρίνουσα Δ του οποίου έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad \text{και} \quad \beta^2 < 3\alpha\gamma$$

οπότε

$$\Delta < 3\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta < -\alpha\gamma \Rightarrow \Delta < 0$$

αφού $\quad 0 \leq \beta^2 < 3\alpha\gamma \Rightarrow \alpha\gamma > 0 \Rightarrow -\alpha\gamma < 0$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο μιγαδικές (συζυγείς) ρίζες z_1, z_2

β) Ισχύουν:

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Επίσης

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\gamma}{\alpha}$$

οπότε

$$w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} \in R$$

Επιπλέον

$$w = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} < \frac{3\alpha\gamma - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = 1$$

οπότε

$$w < 1$$

γ) i) Είναι:

$$f(x) \cdot g(x) = \alpha \Leftrightarrow (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x) e^x = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \alpha e^{-x} \Leftrightarrow x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x} = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x} = 0$ έχει μοναδική θετική λύση x_o.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x}$, $x \geq 0$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} + e^{-x}$$

Η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha}$ είναι: $\Delta = 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{\alpha^2}(\beta^2 - 3\alpha\gamma) < 0$

και επειδή ο συντελεστής του x^2, στο τριώνυμο, είναι θετικός έχουμε:

$$3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Επιπλέον $e^{-x} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε $\varphi'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και

- $\varphi(0) = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x - e^{-x} \right) = +\infty$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x \right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

Επομένως για το σύνολο τιμών της φ έχουμε $\varphi([0, +\infty)) = [-1, +\infty)$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της φ και $\varphi(0) \neq 0$, οπότε θα υπάρχει $x_o \in (0, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα, ώστε $\varphi(x_o) = 0$

Δηλαδή θα υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o)\cdot g(x_o) = \alpha \quad (1)$

ii) Το πεδίο ορισμού της h είναι $A_h = (0, x_o)\cup(x_o, +\infty)$. Η συνάρτηση h της οποίας ο τύπος γράφεται

$$h(x) = \frac{g(x)f(x_o) - \alpha}{f(x_o)(x - x_o)} \overset{(1)}{=} \frac{g(x)f(x_o) - g(x_o)f(x_o)}{f(x_o)(x - x_o)} = \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της με

$$h'(x) = \frac{g'(x)(x - x_o) - g(x) + g(x_o)}{(x - x_o)^2} = \frac{1}{x - x_o}\left[g'(x) - \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \right] \quad (2)$$

Έστω $x > x_o$, τότε στο διάστημα $[x_o, x]$ η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_o, x)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_1) = \dfrac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \quad (3)$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_o}\left(g'(x) - g'(\xi_1) \right)$$

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ και
- $g''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x > 0$ για κάθε $x > x_o > 0$

Επομένως η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x > \xi_1$ έχουμε $g'(x) > g'(\xi_1)$ και κατά συνέπεια

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_o}(g'(x) - g'(\xi_1)) > 0 \text{ για κάθε } x > x_o > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_o, +\infty)$

Έστω $0 < x < x_o$, τότε στο διάστημα $[x, x_o]$ η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x, x_o)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_2) = \dfrac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \quad (4)$

Από τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

$$h'(x)=\frac{1}{x-x_o}\left(g'(x)-g'(\xi_2)\right)$$

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$ και
- $g''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x>0$ για κάθε $x\in(0,x_o)$

Επομένως η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x<\xi_2$ έχουμε $g'(x)<g'(\xi_2)$ και κατά συνέπεια

$$h'(x)=\frac{1}{x-x_o}(g'(x)-g'(\xi_2))>0 \text{ για κάθε } x\in(0,x_o)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,x_o)$

ΘΕΜΑ 13ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , w οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z\overline{w}+2i|=|z|\cdot|w|$$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Im}(\overline{z}w)=1$

β) Να αποδείξετε ότι $|z|^2+|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)\geq\sqrt{3}$

γ) Αν $|z|^2+|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)=\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z|^2=|w|^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

δ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{|z|^2|w|^2}{|z|^2|w|^2+\mathrm{Re}(\overline{z}w)}$

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} τρόπος:

Είναι:

$$|z\overline{w}+2i|=|z|\cdot|w|\Leftrightarrow$$

$$|z\overline{w}+2i|^2=|z|^2\cdot|w|^2\Leftrightarrow$$

$$(z\overline{w}+2i)\cdot\left(\overline{z\overline{w}+2i}\right)=|z|^2\cdot|w|^2\Leftrightarrow$$

$$(z\overline{w}+2i)\cdot\left(\overline{z\overline{w}}+\overline{2i}\right)=|z|^2\cdot|w|^2\Leftrightarrow$$

$$(z\overline{w}+2i)\cdot\left(\overline{z}w-2i\right)=|z|^2\cdot|w|^2\Leftrightarrow$$

$$|z|^2\cdot|w|^2+2i\cdot\overline{z}w-2i\cdot z\overline{w}+4=|z|^2\cdot|w|^2\Leftrightarrow$$

$$2i\cdot(\overline{z}w-z\overline{w})=-4\Leftrightarrow 2i\cdot\left(\overline{z}w-\overline{\overline{z}w}\right)=-4\Leftrightarrow$$

$$2i\cdot 2i\cdot\mathrm{Im}(\overline{z}w)=-4\Leftrightarrow -4\cdot\mathrm{Im}(\overline{z}w)=-4\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\overline{z}w)=1$$

2ος τρόπος:

Είναι:

$$|z\overline{w}+2i| = |z|\cdot|w| \Leftrightarrow |\overline{z\overline{w}+2i}| = |\overline{z}|\cdot|w| \Leftrightarrow$$

$$|\overline{z}w-2i| = |\overline{z}w| \overset{\overline{z}w=u}{\Leftrightarrow} |u-2i| = |u| \Leftrightarrow |u-(0+2i)| = |u-(0+0i)|$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού u κινείται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος OA με $O(0,0)$ και $A(0,2)$, δηλαδή στην ευθεία με εξίσωση $y=1$, οπότε $\text{Im}(u)=1 \Rightarrow \text{Im}(\overline{z}w)=1$

β) Είναι:

$$\text{Im}(\overline{z}w)=1$$

Άρα:

$$\overline{z}w = x+i \quad \text{με } x\in R \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) και επειδή $\overline{z}\neq 0$ έχουμε $w=\dfrac{x+i}{\overline{z}}$ με $x\in R$, οπότε είναι:

$$|w| = \left|\frac{x+i}{\overline{z}}\right| \Rightarrow |w| = \frac{|x+i|}{|\overline{z}|} \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|z|} \quad (2)$$

Άρα έχουμε:

$$|z|^2+|w|^2+\text{Re}(\overline{z}w)\geq\sqrt{3} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$|z|^2+\frac{x^2+1}{|z|^2}+x\geq\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$|z|^4+x^2+1+x|z|^2\geq\sqrt{3}\cdot|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^4+\left(x-\sqrt{3}\right)|z|^2+x^2+1\geq 0 \overset{y=|z|^2}{\Leftrightarrow}$$

$$y^2+\left(x-\sqrt{3}\right)y+x^2+1\geq 0 \qquad (3)$$

Η παράσταση $y^2+\left(x-\sqrt{3}\right)y+x^2+1$ είναι τριώνυμο ως προς y με διακρίνουσα:

$$\Delta=\left(x-\sqrt{3}\right)^2-4(x^2+1)=x^2-2\sqrt{3}x+3-4x^2-4=$$

$$=-3x^2-2\sqrt{3}x-1=-(3x^2+2\sqrt{3}x+1)=-(\sqrt{3}x+1)^2\leq 0$$

Άρα η ανισότητα (3) αληθεύει για κάθε $x,y\in R$, οπότε ισχύει $|z|^2+|w|^2+\text{Re}(\overline{z}w)\geq\sqrt{3}$

γ) Αν υποθέσουμε ότι $\Delta<0$, τότε από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι $|z|^2+|w|^2+\text{Re}(\overline{z}w)>\sqrt{3}$, που είναι άτοπο, άρα υποχρεωτικά είναι $\Delta=0$

Έχουμε:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow -(\sqrt{3}x+1)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

Είναι:

$$|z|^2+|w|^2+\mathrm{Re}(\bar{z}w)=\sqrt{3} \Leftrightarrow y^2+\left(x-\sqrt{3}\right)y+x^2+1=0$$

και δεδομένου ότι $\Delta=0$, προκύπτει ότι:

$$y=\frac{-x+\sqrt{3}}{2} \overset{(4)}{\Rightarrow} y=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y=\frac{2\sqrt{3}}{3} \overset{y=|z|^2}{\Rightarrow} |z|^2=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$|w|^2=\frac{x^2+1}{|z|^2} \overset{(2),(5)}{\Rightarrow} |w|^2=\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow |w|^2=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow |w|^2=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε: $|z|^2=|w|^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

δ) Είναι:

$$\frac{|z|^2|w|^2}{|z|^2|w|^2+\mathrm{Re}(\bar{z}w)}=\frac{|\bar{z}|^2|w|^2}{|\bar{z}|^2|w|^2+\mathrm{Re}(\bar{z}w)}=$$

$$=\frac{|\bar{z}w|^2}{|\bar{z}w|^2+\mathrm{Re}(\bar{z}w)} \overset{(1)}{=} \frac{x^2+1}{x^2+1+x}=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $x\in R$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+x+1)-(x^2+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

Επίσης έχουμε:

- $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+1}{(-1)^2+(-1)+1}=\dfrac{2}{1}=2$
- $f(1)=\dfrac{1^2+1}{1^2+1+1}=\dfrac{2}{3}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1
			μεγ.		ελαχ.		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = -1$ με τιμή $f(-1) = 2$ και ελάχιστο στο $x_2 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = \frac{2}{3}$, άρα για κάθε $x \in R$ είναι $\frac{2}{3} \le f(x) \le 2$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\frac{|z|^2|w|^2}{|z|^2|w|^2 + Re(\overline{z}w)}$ είναι $\frac{2}{3}$ και η μέγιστη τιμή της είναι 2

ΘΕΜΑ 14ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z+2-4i|^2 + |z-2+4i|^2 = 58$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ και να βρείτε τα κοινά σημεία του με τον άξονα $y'y$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = z + \frac{9}{z}$ είναι πραγματικός και για κάθε w ισχύει $-6 \le w \le 6$

γ) Αν z_1, z_2 και z_3 είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = 3|z_1 + z_2 + z_3|$$

δ) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί v, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$v\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z(w-\overline{z}) + \overline{z}(w-z) + 2|z|^2 - |w|^2 + 3,$$

όπου $\theta \in R$ και $\theta \ne \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$

i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών v ανήκουν στην υπερβολή $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

ii) Να βρείτε τα σημεία της υπερβολής $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$, που απέχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(0,3)$

ΛΥΣΗ

Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in R$

α) Έχουμε:

$$|z+2-4i|^2 + |z-2+4i|^2 = 58 \Leftrightarrow$$

$$|x+yi+2-4i|^2+|x+yi-2+4i|^2=58 \Leftrightarrow$$
$$|x+2+(y-4)i|^2+|x-2+(y+4)i|^2=58 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2+y-4)^2+(x-2)^2+(y+4)^2=58 \Leftrightarrow$$
$$x^2+4x+4+y^2-8y+16+x^2-4x+4+y^2+8y+16=58 \Leftrightarrow$$
$$2x^2+2y^2=18 \Leftrightarrow x^2+y^2=9 \Leftrightarrow C: x^2+y^2=3^2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$

Για $x=0$ έχουμε:

$$0^2+y^2=3^2 \Leftrightarrow y^2=3^2 \Leftrightarrow y=3 \;\text{ ή }\; y=-3$$

Οπότε τα κοινά σημεία του γεωμετρικού τόπου με τον άξονα $y'y$ είναι τα $A(0,3)$ και $B(0,-3)$

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$, άρα ισχύει:

$$|z|=3 \Leftrightarrow |z|^2=9 \Leftrightarrow z\overline{z}=9 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{9}{z} \;\text{ ή }\; z=\frac{9}{\overline{z}} \quad (1)$$

Ισχύει:

$$\overline{w}=\overline{z}+\frac{9}{\overline{z}} \overset{(1)}{=} \frac{9}{z}+z=w$$

Άρα ο w είναι πραγματικός αριθμός.

Επίσης έχουμε:

$$w=z+\frac{9}{z} \overset{(1)}{=} z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z) \quad (2)$$

Ισχύει $|z|=3$, οπότε $-3\le \mathrm{Re}(z)\le 3 \Leftrightarrow -6\le 2\mathrm{Re}(z)\le 6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -6\le w\le 6$

γ) Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 και z_3 ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1\overline{z_1}=9 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\frac{9}{z_1}\;,\quad z_2\overline{z_2}=9 \Leftrightarrow \overline{z_2}=\frac{9}{z_2} \;\text{ και }\; z_3\overline{z_3}=9 \Leftrightarrow \overline{z_3}=\frac{9}{z_3}$$

Είναι:

$$|z_1+z_2+z_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=$$

$$=9\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=9\cdot\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1z_2z_3|}=9\cdot\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}=$$

$$=\frac{9\cdot|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{3\cdot3\cdot3}=\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{3}$$

Δείξαμε ότι:

$$|z_1+z_2+z_3|=\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{3}$$

Άρα έχουμε:

$$|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|=3|z_1+z_2+z_3|$$

δ) i) Έχουμε:

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z(w-\overline{z}) + \overline{z}(w-z) + 2|z|^2 - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z\cdot w - z\cdot\overline{z} + \overline{z}\cdot w - z\cdot\overline{z} + 2z\cdot\overline{z} - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z\cdot w + \overline{z}\cdot w - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = z\cdot w + \overline{z}\cdot w - w\cdot\overline{w} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = w\cdot(z + \overline{z} - \overline{w}) + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = 2x\cdot(2x - 2x) + 3 \Leftrightarrow$$

$$\nu\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta = 3 \Leftrightarrow \nu\sigma\upsilon\nu\theta = 3 + i\eta\mu\theta \quad (3)$$

Επειδή $\theta\in R$ και $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$ συμπεραίνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$, οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με $\sigma\upsilon\nu\theta$ ισοδύναμα έχουμε:

$$\nu = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta} + i\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow \nu = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta} + i\varepsilon\varphi\theta$$

Αν θέσουμε $\nu = \alpha + \beta i$ με $\alpha,\beta\in R$, τότε έχουμε:

$$\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\alpha}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \beta$$

Ισχύει:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 1 + \varepsilon\varphi^2\theta\ ,\ \ \theta\in R \ \text{ με } \theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ \kappa\in Z$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} = 1 + \beta^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} - \beta^2 = 1$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών ν ανήκουν στην υπερβολή $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

ii) Έστω $M(\alpha,\beta)$ σημείο της υπερβολής $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

Η απόσταση του σημείου $A(0,3)$ από το σημείο $M(\alpha,\beta)$ είναι:

$$d(A,M) = d = \sqrt{(\alpha-0)^2 + (\beta-3)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta-3)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 6\beta + 9} \quad (4)$$

Επειδή το σημείο $M(\alpha,\beta)\in C$ έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} - \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} = 1 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 + 9\beta^2$$

Με αντικατάσταση του α^2 στη σχέση (4) έχουμε:

$$d = \sqrt{9 + 9\beta^2 + \beta^2 - 6\beta + 9} = \sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(\beta) = \sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}$, $\beta\in R$

Για κάθε $\beta \in R$ είναι:

$$d'(\beta) = \frac{(10\beta^2 - 6\beta + 18)'}{2\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}} = \frac{20\beta - 6}{2\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}} = \frac{10\beta - 3}{\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}}$$

Είναι:

- $d'(\beta) = 0 \Leftrightarrow 10\beta - 3 = 0 \Leftrightarrow 10\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{10}$
- $d'(\beta) > 0 \Leftrightarrow 10\beta - 3 > 0 \Leftrightarrow 10\beta > 3 \Leftrightarrow \beta > \frac{3}{10}$

Το πρόσημο της $d'(\beta)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης d φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

β	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
$d'(\beta)$	$-$	0	$+$
$d(\beta)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ελάχιστο	

Η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστο για $\beta = \frac{3}{10}$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων της υπερβολής με τεταγμένη $\beta = \frac{3}{10}$

Έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} - \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} = 1 + \frac{9}{100} \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \cdot \frac{109}{100} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{3\sqrt{109}}{10}$$

Οπότε τα σημεία της υπερβολής που έχουν την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(0,3)$ είναι:

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{109}}{10}, \frac{3}{10}\right) \text{ και } M_2\left(-\frac{3\sqrt{109}}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

ΘΕΜΑ 15ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και τη συνάρτηση $f(z) = z + 1 - i$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left|(1 + 2i)w - 5\right| = 3\sqrt{5}$
- $\overline{f(z)} = f(z)$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

γ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών w και z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $R = 3$ και στην ευθεία $y = 1$ αντιστοίχως, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί w και z για τους οποίους ισχύει $z = w$

ii) Να βρείτε τους w, που είναι πραγματικοί αριθμοί.

iii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|w - 5 + 6i|$

δ) Έστω $M(x,y)$ η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z με $Re(z)>0$, η οποία κινείται στην ευθεία $y=1$. Αν το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με $1 cm/s$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας, την οποία σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(3,1)$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left|(1+2i)w-5\right|=3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|(1+2i)\left(w-\frac{5}{1+2i}\right)\right|=3\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\left|1+2i\right|\left|w-\frac{5(1-2i)}{5}\right|=3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|w-(1-2i)\right|=3$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $R=3$

β) Είναι:

$$\overline{f(z)}=f(z) \Leftrightarrow \overline{z}+1+i=z+1-i \Leftrightarrow z-\overline{z}=2i \Leftrightarrow \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} 2yi=2i \Leftrightarrow y=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y=1$

γ) i) Ο παραπάνω κύκλος και η ευθεία $y=1$ εφάπτονται, αφού $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|-2-1|}{\sqrt{1}}=3=R$. Άρα υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί w και z για τους οποίους ισχύει $z=w$

ii) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $w=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $R=3$, που έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

Για $y=0$ από την εξίσωση του κύκλου προκύπτει:

$$(x-1)^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}+1 \quad ή \quad x=-\sqrt{5}+1$$

Επομένως οι αριθμοί w, που είναι πραγματικοί αριθμοί είναι:

$$w=\sqrt{5}+1+0i=\sqrt{5}+1 \quad και \quad w=-\sqrt{5}+1+0i=-\sqrt{5}+1$$

iii) Το μέτρο $|w-(5-6i)|$ ισούται με την απόσταση της εικόνας του w από το σημείο $A(5,-6)$, που είναι η εικόνα του μιγαδικού $5-6i$

Άρα η μέγιστη τιμή του μέτρου $|w-(5-6i)|$ είναι:

$$|w-5+6i|_{max}=(KA)+R=\sqrt{(5-1)^2+(-6+2)^2}+3=$$
$$=\sqrt{16+16}+3=\sqrt{32}+3=4\sqrt{2}+3$$

δ) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z με τον άξονα $x'x$, τότε:

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{y}{x} \overset{y=1}{\Rightarrow} \varepsilon\varphi\theta=\frac{1}{x}\ ,\ x>0$$

Επειδή η τετμημένη x μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t είναι:

$$\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{1}{x(t)}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς t έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{x^2(t)} \qquad (1)$$

Όμως:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=1+\varepsilon\varphi^2\theta(t) \qquad (2)$$

Η σχέση (1) με βάση τη σχέση (2) γράφεται:

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{x^2(t)} \qquad (3)$$

Έστω t_o η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(3,1)$, τότε για $t=t_o$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_o)\right)\cdot\theta'(t_o)=-\frac{x'(t_o)}{x^2(t_o)} \qquad (4)$$

Επίσης έχουμε:

$$x(t_o)=3\ ,\quad x'(t_o)=1$$

και

$$1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_o)=1+\frac{1}{x^2(t_o)}=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{10}{9}\cdot\theta'(t_o)=-\frac{1}{9}\Leftrightarrow\theta'(t_o)=-\frac{1}{10}\,\text{rad}/\text{s}$$

Δηλαδή καθώς το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ η γωνία της διανυσματικής ακτίνας του z με τον άξονα $x'x$ μειώνεται.