ΣΠΥΡΟΣ ΧΡΙΣΤΙΑΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΘΗΝΑ 2009

1. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Ζητείται να δειχθεί ισότητα αλγεβρικών αθροισμάτων διανυσμάτων. Τότε ξεκινάμε από το πιο πολύπλοκο μέλος και με βάση την υπόθεση καταλήγουμε στο πιο απλό ή εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της προς απόδειξη σχέσης μέσω σημείου αναφοράς και καταλήγουμε σε δύο ίσα μέλη.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 21, Άσκηση Α΄ 5.
2. Σε περίπτωση όπου ζητείται να δειχθεί ισότητα αλγεβρικών αθροισμάτων διανυσμάτων με πολλά διανύσματα, είναι προτιμότερο να εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της προς απόδειξη σχέσης μέσω σημείου αναφοράς. Αντικαθιστώντας στη σχέση θα καταλήγουμε στο ζητούμενο.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 21, Άσκηση Α΄ 7.
3. Εάν ζητείται να εκφρασθεί διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συναρτήσει άλλων διανυσμάτων $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, … τότε με βάση την υπόθεση προσπαθούμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, …

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 21, Άσκηση Α΄ 6.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

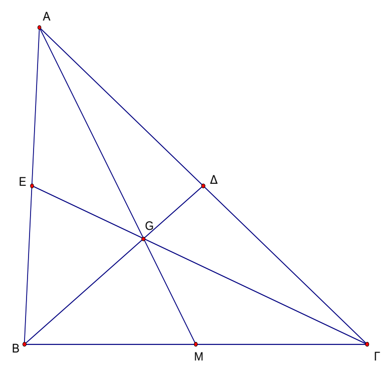
1. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο σε διάνυσμα $\vec{\beta}$ τότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε να ισχύει : $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 27, Άσκηση Α΄ 11.
2. **Ιδιότητες Βαρύκεντρου :**

   α)

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM},\quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B\Delta},\quad \overrightarrow{\Gamma G} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma E}$$

$$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM},\quad \overrightarrow{G\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Delta},\quad \overrightarrow{GE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma E}$$



$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{G\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma G} = 2\overrightarrow{GE}$

β) Επιπλέον ισχύει ότι $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{\Gamma G} = \vec{0}$ και για κάθε σημείο **O** του επιπέδου ισχύει ότι $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$.

(Είναι εφαρμογή του Σχολικού βιβλίου αλλά προτείνεται να μην διδαχθεί).

3. Ζητείται να δειχθεί ότι τρία σημεία του επιπέδου είναι συνευθειακά. Τότε δείχνουμε ότι δύο από τα τρία διανύσματα που σχηματίζουν αυτά τα σημεία είναι παράλληλα. (π.χ. Εάν Α, Β, Γ είναι τα σημεία δείχνουμε ότι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$).

   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 27, Άσκηση Α΄ 5.

4. Σε ασκήσεις με διανύσματα διαμέσων χρησιμοποιούμε τη σχέση που μας δίνει τη διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος εναλλάσσοντας κάθε φορά τα γράμματα των διανυσμάτων.

   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 27, Άσκηση Α΄ 7.

5. Εάν ζητείται να βρεθεί σημείο **Μ** του επιπέδου ώστε να ισχύει σχέση διανυσμάτων τότε προσπαθούμε να εκφράσουμε διάνυσμα με αρχή ή τέλος το σημείο **Μ** συναρτήσει γνωστών διανυσμάτων της υπόθεσης. Από τη σχέση αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο **Μ**.

   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 28, Άσκηση Β΄ 5.

6. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι αλγεβρικό άθροισμα διανυσμάτων που περιέχουν τυχαίο σημείο **Μ** είναι σταθερό, τότε εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της υπόθεσης με σημείο αναφοράς οποιοδήποτε σταθερό σημείο και δείχνουμε ότι το ζητούμενο αλγεβρικό άθροισμα διανυσμάτων εξαρτάται μόνο από σταθερά διανύσματα (Ουσιαστικά προσπαθούμε να απαλείψουμε το σημείο **Μ**).

   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 29, Άσκηση Β΄ 8.

7. **<u>Βασική Ιδιότητα 1 :</u>** Εάν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου τέτοια ώστε $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε **λ=μ=0**. (Εάν χρησιμοποιηθεί τότε πρέπει να αποδειχθεί). Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αποδείξουμε δοσμένη σχέση παραλληλίας διανυσμάτων. Καταλήγουμε σε γραμμικό συνδυασμό μη συγγραμμικών διανυσμάτων ίσο με το μηδενικό διάνυσμα και έτσι προσδιορίζουμε τους ζητούμενους συντελεστές.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 29, Άσκηση Β΄ 9.

8. **Βασική Ιδιότητα 2 :** Εάν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τρία διανύσματα του επιπέδου, με $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά, τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μπορεί να γραφεί, κατά μοναδικό τρόπο, ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ (π.χ. $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}$ με λ, μ μοναδικά). Μέσω αυτής της σχέσης μειώνουμε τον αριθμό των άγνωστων διανυσμάτων.

   Εφαρμογή : (Θα δοθεί παράδειγμα σε επόμενο μάθημα).

9. **Τριγωνική Ανισότητα στα Διανύσματα :**

   Γνωρίζουμε ότι ισχύει : $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

   Εάν ισχύει ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

   Εάν ισχύει ότι $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

   Εάν ισχύει ότι $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε η τριγωνική ανισότητα ισχύει πάντα ως ισότητα.

   Εφαρμογή : Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\beta}| = 3|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\gamma}| = 4|\vec{\alpha}|$. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του διανύσματος $\vec{\beta}$ και ότι το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε δύο διανύσματα με συντεταγμένες να είναι ίσα, τότε απαιτούμε να έχουν ίσες συντεταγμένες και επιλέγουμε την κοινή τιμή της παραμέτρου που ικανοποιεί και τις δύο ισότητες.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 39, Άσκηση Α΄ 4.

2. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ που δίνεται με συντεταγμένες να είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε απαιτούμε οι συντεταγμένες του να είναι ίσες με το μηδέν και επιλέγουμε την κοινή τιμή της παραμέτρου που ικανοποιεί και τις δύο ισότητες. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ που δίνεται με συντεταγμένες να

είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ τότε απαιτούμε η τεταγμένη του να είναι ίση με μηδέν και για να είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$ απαιτούμε η τετμημένη του να είναι ίση με μηδέν.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 39, Άσκηση Α΄ 3.

3. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε τρία σημεία **Α, Β, Γ** με συντεταγμένες να είναι συνευθειακά, τότε σχηματίζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ (ή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ ή τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$) και απαιτούμε $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 0$ (ή αντίστοιχα $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0$ ή $\det(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0$).

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 38, Εφαρμογή.

4. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε δύο διανύσματα με συντεταγμένες να είναι παράλληλα, τότε απαιτούμε η ορίζουσά τους να είναι μηδέν. Εάν επιπλέον ζητείται να είναι ομόρροπα ή αντίρροπα, τότε για την τιμή της παραμέτρου που βρήκαμε ελέγχουμε εάν τα διανύσματα είναι ομόρροπα ή αντίρροπα.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 39, Άσκηση Α΄ 5.

5. Εάν ζητείται να βρεθεί σημείο **Μ** του επιπέδου που να ικανοποιεί δοσμένη σχέση με διανύσματα που δίνονται με συντεταγμένες, τότε θέτουμε ως **Μ** το σημείο $M(x, y)$ και από την υπόθεση καταλήγουμε σε σύστημα δύο εξισώσεων ως προς x, y.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 40, Άσκηση Α΄ 8.

6. Σε ασκήσεις όπου δίνονται μέσα διανυσμάτων ή ζητείται να βρεθεί μέσο διανύσματος (π.χ. κέντρο παραλληλογράμμου) θα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 40, Άσκηση Β΄ 1, Β΄ 2.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Ζητείται να βρεθεί εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων των οποίων δίνονται τα μέτρα και η γωνία τους. Τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου. Εάν τα διανύσματα δίνονται με συντεταγμένες τότε χρησιμοποιούμε την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 47, Άσκηση Α΄ 1, Α΄ 7.

2. Εάν ζητείται να βρεθεί γωνία δύο διανυσμάτων τότε βρίσκουμε το συνημίτονο της γωνίας μέσω του ορισμού του εσωτερικού γινομένου.
   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 47, Άσκηση Α΄ 7.
3. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε δείχνουμε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$. Εάν ζητείται να βρεθεί τιμή παραμέτρου ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε απαιτούμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου.
   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 47, Άσκηση Α΄ 9, Α΄ 5.
4. **<u>Εύρεση Διανύσματος προβολής :</u>** Γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.
   Όμως $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$. Άρα $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}$. Επομένως $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\vec{\alpha}$.
   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 46, Εφαρμογή 1.
5. **<u>Ανάλυση Γνωστού Διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία είναι παράλληλη σε άλλο γνωστό διάνυσμα :</u>**
   Έχουμε ότι : $\vec{\alpha} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ με $\vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}_2$ και $\vec{\beta}_1 \,//\, \vec{\gamma}$. Τότε θα ισχύει ότι $\vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}_2 \perp \vec{\gamma}$. Άρα παίρνουμε ότι : $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\gamma} + \vec{\beta}_2$ με $\vec{\beta}_2 \perp \vec{\gamma}$. Πολλαπλασιάζουμε την ισότητα με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ και έτσι έχουμε : $\vec{\alpha}\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{\vec{\gamma}^2}$. Άρα προκύπτει ότι $\vec{\beta}_1 = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{\vec{\gamma}^2}\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}_2 = \vec{\alpha} - \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{\vec{\gamma}^2}\vec{\gamma}$.
   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 46, Εφαρμογή 2.
6. Σε γεωμετρικές ασκήσεις με καθετότητες πλευρών θα χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.
   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 50, Άσκηση Β΄ 10, Β΄ 11.
7. Εάν δίνεται γνωστός γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων ίσος με το μηδενικό διάνυσμα και ζητούνται εσωτερικά γινόμενα, τότε πολλαπλασιάζουμε το γραμμικό συνδυασμό με κάθε ένα από τα διανύσματα που τον αποτελούν. Έτσι σχηματίζεται ένα σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα εσωτερικά γινόμενα που μας ενδιαφέρουν.
   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 49, Άσκηση Β΄ 4.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

1. Εάν τυχαίο σημείο **Μ** ικανοποιεί ισότητα της μορφής $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{\alpha}$ όπου **Α** σταθερό γνωστό σημείο και $\vec{\alpha}$ γνωστό διάνυσμα, τότε το σημείο **Μ** ανήκει σε ευθεία που διέρχεται από το σημείο **Α** και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
2. Εάν τυχαίο σημείο **Μ** ικανοποιεί ισότητα της μορφής $|\overrightarrow{AM}| = \rho$ όπου **Α** σταθερό γνωστό σημείο και **ρ>0**, τότε το σημείο **Μ** κινείται σε κύκλο κέντρου **Α** και ακτίνας **ρ**.

   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 50, Άσκηση Γενικές 3.
3. Εάν τυχαίο σημείο **Μ** ικανοποιεί ισότητα της μορφής $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ όπου **Α** και **Β** σταθερά γνωστά σημεία, τότε το σημείο **Μ** ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος **ΑΒ**.

   <u>Εφαρμογή :</u> Δίνονται τα σταθερά σημεία **Α** και **Β** του επιπέδου. Εάν το τυχαίο σημείο **Μ** που είναι διαφορετικό των **Α** και **Β**, ικανοποιεί τη σχέση $|\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{BM}|^2$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων **Μ**.

   <u>Εφαρμογή για το Β8 :</u> Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,\ 1)$ και $\vec{\beta} = (1,\ -1)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}$ συνεπίπεδο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για το οποίο ισχύουν τα ακόλουθα : i) $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$, ii) Σχηματίζει αμβλεία γωνία με το διάνυσμα $\vec{\beta}$ και iii) $|\vec{\gamma}| = |\vec{\alpha}|$.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το μέσο του Μ. Να δειχθεί ότι για την διανυσματική ακτίνα του Μ ισχύει ότι : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.
2. Να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
3. Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να δειχθεί ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.
4. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.
5. Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda \in \Re$ τέτοιο ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$.
6. Εάν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, να αποδείξετε ότι: $\text{συν}\theta = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.
7. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες :

α) Εάν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \omega$ και $(\vec{\gamma}, \vec{\beta}) = \varphi$ με **συνφ+συνω=2** τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα.

β) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως.

γ) Εάν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ τότε **λ=μ**.

δ) Για δύο τυχαία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι : $\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$.

ε) Εάν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

στ) Εάν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 1$ **και** $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{6}$, τότε $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 1$.

ζ) Για δύο τυχαία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι : $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \,//\, \vec{\alpha}$.

η) Εάν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε $\dfrac{\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta}^2 \cdot \vec{\gamma})}{\vec{\beta}^2} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

θ) Για δύο τυχαία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι : $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

ι) Εάν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

ια) Εάν **det** $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$.

8. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	**1.** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lvert\vec{\alpha}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$
β. ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	**2.** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\lvert\vec{\alpha}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$
γ. αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	**3.** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
	4. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2\,\lvert\vec{\alpha}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$

9. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, \lambda)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Εάν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, τότε : **α. λ=1 β. λ=0 γ. λ=–2 δ. λ=2**

β) Εάν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε : **α. λ=1 β.λ=0 γ.λ=–2 δ. λ=2**

γ) Εάν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε : **α. λ=–1 β.λ=0 γ.λ=–2 δ.λ=2**

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $\lvert\vec{\alpha}\rvert = \sqrt{3}$ και $\lvert\vec{\beta}\rvert = 1$. Εάν $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{1}{2}\vec{\alpha}$ τότε η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίση με : **α. π/6** **β. π/3** **γ. π/4** **δ. π**

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Έστω ευθεία **(ε)** διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ πάνω σε αυτήν με $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 1$ και σημείο **Μ** εκτός της ευθείας. Εάν **Μ'** το συμμετρικό του **Μ** ως προς την ευθεία να δειχθεί ότι $\overrightarrow{AM'} = 2(\overrightarrow{AM}\overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$.
2. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** και τα σημεία **Δ** και **Ε** στις πλευρές **ΑΒ** και **ΑΓ** αντίστοιχα για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma A}$. Εάν **Κ** και **Λ** είναι τα μέσα των πλευρών **ΑΒ** και **ΔΕ** αντίστοιχα να δειχθεί ότι $\overrightarrow{K\Lambda} \,//\, \overrightarrow{B\Gamma}$.
3. Δίνεται ένα τρίγωνο **ΑΒΓ** και το μέσο **Ο** της πλευράς του **ΒΓ**.

α) Να βρεθούν τα σημεία **Μ** και **Ν** για τα οποία ισχύουν : $2\vec{AM} + 3\vec{MB} - 3\vec{\Gamma M} = \vec{0}$ και $\vec{AN} - 2\vec{BN} + 2\vec{N\Gamma} = \vec{0}$.

β) Να δειχθεί ότι τα σημεία **Α**, **Μ** και **Ν** είναι συνευθειακά.

γ) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{AO}, \vec{AM}$ και $\vec{AN}$ είναι συγγραμμικά.

4. Δίνονται τα σταθερά σημεία **Α**, **Β**, **Γ** και το μεταβλητό σημείο **Μ**. Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα $\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

5. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ**, το μέσο **Μ** της **ΒΓ** και σημείο **Ρ** τέτοιο ώστε $\vec{AP} = 2\vec{PM}$. Εάν **Ν** το μέσο της **ΑΓ** να δειχθεί ότι τα σημεία **Β**, **Ρ** και **Ν** είναι συνευθειακά.

6. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά ανά δύο και τέτοια ώστε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\gamma}$. Να δειχθεί ότι $\vec{\gamma} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

7. Εάν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$ και $\vec{\beta} = (50, \lambda)$ είναι παράλληλα, τότε :

α) Να βρεθούν οι τιμές του **λ**.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $M(x,\ x+1)$ όταν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ισχύει ότι $\vec{OM} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

8. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ισχύουν : $\vec{x} + 2\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, $\overrightarrow{(x + \beta)} \perp \vec{\alpha}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi / 4$.

α) Να εκφρασθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να υπολογισθεί το $|\vec{x} + \vec{\alpha}|$.

9. Δίνονται τα σημεία **Α**, **Β**, **Γ**, **Ο** τέτοια ώστε $3\vec{OA} + \vec{OB} - 4\vec{O\Gamma} = \vec{0}$.

α) Να δειχθεί ότι τα σημεία **Α**, **Β** και **Γ** είναι συνευθειακά.

β) Εάν για το μεταβλητό σημείο Μ ισχύει ότι : $\vec{MA} \cdot \vec{\Gamma B} + 4\vec{MA} \cdot \vec{\Gamma A} = 0$ να βρεθεί η γραμμή που γράφουν τα σημεία **Μ**.

10. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $(\kappa\vec{\alpha} + \overrightarrow{\lambda\beta}) \perp \left(\lambda\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}\right)$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

β) Εάν $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ να βρεθεί το $|\vec{\alpha}|$.

11. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-6, 8)$.

α) Να βρεθεί το μέτρο και ο συντελεστής διευθύνσεώς του.

β) Να εκφρασθεί το $\vec{\alpha}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{u} = (2, 3)$ **και** $\vec{v} = (1, 2)$.

γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και με μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\vec{\alpha}$.

12.Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν : $\vec{\alpha} - 8\vec{\gamma} + 3\vec{\beta} = \vec{0}$ **και** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}| = 1,\ |\vec{\beta}| = \sqrt{7}$.

α) Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

β) Εάν θεωρήσουμε ότι $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}, \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ **και** $\overrightarrow{O\Delta} = 2\overrightarrow{O\Gamma}$ όπου **Ο** τυχαίο σημείο του επιπέδου να δειχθεί ότι τα σημεία **Α**, **Β**, **Δ** είναι συνευθειακά.

13.Εάν $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ **και** $\vec{\beta} = (8, 6)$ να βρεθεί το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

14.Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha},\ \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta},\ (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3},\ |\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 4$. Έστω **Κ**, **Μ** τα μέσα των **ΑΒ** και **ΒΓ** αντίστοιχα. Από το **Μ** φέρνουμε την κάθετο **ΜΛ** στην **ΚΜ** που τέμνει την **ΑΓ** στο **Λ** και έστω **λ** ο πραγματικός για τον οποίο ισχύει : $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = \lambda \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να εκφρασθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{KM}$ συναρτήσει του $\vec{\beta}$ και το $\overrightarrow{M\Lambda}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \lambda$.

β) Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = -\frac{5}{16}\overrightarrow{A\Gamma}$.

15.Δίνεται παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ** και σημεία **Ε**, **Ζ** τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta Z} = \beta\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ με $\alpha+\beta=1$. Να δειχθεί ότι η ευθεία **ΕΖ** διέρχεται από το κέντρο **Ο** του παραλληλογράμμου.

16.Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός **κ**, ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **και** $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

17. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{A\Gamma}| = 4$ και $(\vec{AB},\vec{A\Gamma}) = \frac{\pi}{3}$. Εάν **Κ** σημείο της πλευράς **ΒΓ** τέτοιο ώστε $\vec{BK} = 3\vec{\Gamma K}$ να βρεθεί το $|\vec{AK}|$.

18. Δίνονται τα σημεία **Α(4, 0)** και **Β(0, 5)** στο ορθοκανονικό σύστημα **Οxy**.

α) Να βρεθεί σημείο **Μ** του τμήματος **ΑΒ** τέτοιο ώστε $\vec{OM} \perp \vec{AB}$.

β) Εάν **Κ** το μέσο του $\vec{OA}$ και **Λ** το μέσο του $\vec{OB}$ τότε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{MK}\vec{M\Lambda}$ είναι ίσο με : **Α.** 1 **Β.** $\vec{MO}^2$ **Γ.** $\vec{MK}^2$ **Δ.** 0

19. Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ να δειχθεί ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

20. Έστω το κυρτό τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** με $\vec{AB} = (1,\ 2)$, $\vec{A\Gamma} = (0,\ 5)$ και $\vec{B\Delta} = (-2,\ 1)$.

α) Να δειχθεί ότι το **ΑΒΓΔ** είναι παραλληλόγραμμο και να βρεθούν οι γωνίες του.

β) Εάν **Μ** τυχαίο σημείο να δειχθεί ότι η διαφορά $\vec{MA}\vec{M\Gamma} - \vec{MB}\vec{M\Delta}$ είναι σταθερή ποσότητα.

21. Εάν $|\vec{\alpha} - \vec{\gamma}| = 2|\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = 4|\vec{\gamma} - \vec{\alpha}|$ να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

22. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (|\vec{\beta}| - \kappa,\ \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\kappa,\ |\vec{\alpha}| - \lambda)$.

α) Να βρεθεί το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

23. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να λυθεί η εξίσωση $|\vec{x} - \vec{\alpha}|\vec{x} = |\vec{x} + 8\vec{\alpha}|\vec{\alpha}$.

24. Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = \rho$, $|\vec{\beta}| = 3\rho - 4$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \rho^2$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός **ρ** και να εξετασθεί εάν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. **Εύρεση Συντελεστή Διευθύνσεως Ευθείας :** Ανάλογα με την υπόθεση του προβλήματος (Η ευθεία διέρχεται από δύο γνωστά σημεία, Η ευθεία σχηματίζει γνωστή γωνία ω με τον άξονα $x'x$, Η ευθεία είναι παράλληλη σε γνωστή ευθεία, Η ευθεία είναι κάθετη σε γνωστή ευθεία, Έχει δοθεί η εξίσωση της ευθείας) βρίσκουμε τον συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 64, Άσκηση Α΄ 1.

2. **Εύρεση Εξίσωσης Ευθείας :** Για να βρούμε την εξίσωση μίας ευθείας χρειαζόμαστε πάντοτε να γνωρίζουμε τον συντελεστή διευθύνσεως λ της ευθείας και ένα γνωστό σημείο της $M(x_0, y_0)$. (Ο συντελεστής διευθύνσεως θα προσδιορίζεται με έναν από τους τρόπους που αναφέραμε στο **1**). Τότε η εξίσωση της ευθείας θα δίνεται από τη σχέση $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 64, Άσκηση Α΄ 3.

3. Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο $M(x_0, y_0)$ και η οποία ικανοποιεί δοσμένη ιδιότητα, τότε υποθέτουμε ότι η ευθεία είναι της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ και από την ιδιότητα προσδιορίζουμε το συντελεστή διευθύνσεως. **ΠΡΟΣΟΧΗ :** *Θα εξετάζουμε πάντοτε και εάν η ευθεία με εξίσωση* $x=x_0$ αποτελεί λύση του προβλήματος.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 65, Άσκηση Β΄ 1, Β΄ 3.

4. Εάν ζητείται να βρεθεί το συμμετρικό γνωστού σημείου A ως προς γνωστή ευθεία τότε υποθέτουμε το συμμετρικό ως το σημείο $A_1=(x_1, y_1)$, βρίσκουμε την εξίσωση της κάθετης ευθείας που διέρχεται από το A προς την αρχική, βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο ευθειών, που θα αποτελεί το μέσο του AA_1 και έτσι καταλήγουμε σε σύστημα ως προς x_1 , y_1.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 63, Εφαρμογή 2.

5. Σε προβλήματα με τρίγωνα, παραλληλόγραμμα, τετράγωνα κ.ο.κ. οι

κορυφές τους θα προκύπτουν από την επίλυση των συστημάτων των εξισώσεων των πλευρών τους. Για παράδειγμα, σε τρίγωνο **ΑΒΓ**, η κορυφή **Α** θα προκύπτει από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων ευθειών των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ**. Επίσης, ανάλογα με την υπόθεση θα μπορούμε να προσδιορίζουμε συντελεστές διευθύνσεως ευθειών. Για παράδειγμα, εάν **ΑΔ** το ύψος τριγώνου **ΑΒΓ** τότε $\lambda_{ΑΔ}\lambda_{ΒΓ}=-1$.

<u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 65, Άσκηση Β΄ 2.

<u>ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ</u>

1. Εάν ζητείται να βρεθεί τιμή παραμέτρου ώστε εξίσωση της μορφής **Αx+Βy+Γ=0** να παριστάνει ευθεία, τότε απαιτούμε τα **Α** και **Β** να μην μηδενίζονται ταυτόχρονα. Εάν ζητείται να βρεθεί τιμή παραμέτρου ώστε ευθεία της μορφής **Αx+Βy+Γ=0** να είναι παράλληλη προς τον άξονα **x'x** τότε απαιτούμε **Α=0** και $B \neq 0$, ενώ εάν θέλουμε να είναι παράλληλη προς τον άξονα **y'y** τότε απαιτούμε **Β=0** και $A \neq 0$. Τέλος εάν θέλουμε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε απαιτούμε **Γ=0**.

<u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 69, Άσκηση Α΄ 1.

2. Εάν ζητείται να βρεθεί η γωνία δύο ευθειών τότε βρίσκουμε τη γωνία που σχηματίζουν τα παράλληλα προς τις ευθείες διανύσματα. Ανάλογα με το πρόσημο του συνημίτονου θα έχουμε την οξεία ή την αμβλεία γωνία.

<u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 70, Άσκηση Β΄ 4.

3. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι τρεις ευθείες συντρέχουν, τότε βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο ευθειών και δείχνουμε ότι το σημείο αυτό ικανοποιεί και την εξίσωση της τρίτης ευθείας.

<u>Σχετικές Θέσεις τριών ευθειών στο Επίπεδο :</u> Οι σχετικές τους θέσεις είναι οι εξής : Να διέρχονται και οι τρεις από το ίδιο σημείο, Να τέμνονται ανά δύο, Δύο να είναι παράλληλες και η τρίτη να τις τέμνει, Και οι τρεις να είναι παράλληλες, Δύο να ταυτίζονται και η τρίτη να τις τέμνει, Δύο να ταυτίζονται και η τρίτη να είναι παράλληλη προς αυτές και τέλος και οι τρεις να ταυτίζονται. (Σύνολο : Επτά σχετικές Θέσεις).

<u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 70, Άσκηση Β΄ 3.

4. Εάν ζητείται να βρεθεί η γραμμή που παριστάνει μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x, y τότε παραγοντοποιούμε την εξίσωση και καταλήγουμε σε ένα γινόμενο δύο ευθειών ίσο με μηδέν. Έτσι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 70, Άσκηση Β΄ 1.
5. Εάν ζητείται να βρεθεί γεωμετρικός τόπος σημείου Μ που οι συντεταγμένες του δίνονται συναρτήσει παραμέτρου λ, τότε απαλείφουμε την παράμετρο λ μεταξύ των συντεταγμένων του και έτσι καταλήγουμε σε μία σχέση συναρτήσει των x_M και y_M που θα αποτελεί τον ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Εάν αυτή σχέση είναι πρωτοβάθμια τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 76, Γενικές Ασκήσεις 2.
6. Εάν ζητείται να βρεθεί τιμή παραμέτρου ώστε ευθεία να είναι παράλληλη ή κάθετη σε γνωστή ευθεία, τότε απαιτούμε οι συντελεστές διευθύνσεως να είναι ίσοι ή το γινόμενό τους να είναι ίσο με -1 αντίστοιχα. **ΠΡΟΣΟΧΗ :** *Θα εξετάζουμε πάντοτε και τις τιμές των παραμέτρων που μηδενίζουν τυχόν παρονομαστή.*

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 69, Άσκηση Α΄ 5.
7. **Οικογένεια ή Δέσμη Ευθειών :** Δίνεται γενική μορφή εξίσωσης ευθείας συναρτήσει παραμέτρου με την παράμετρο να διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι όλες αυτές οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο για κάθε τιμή της παραμέτρου, τότε ανακατασκευάζουμε την εξίσωση ως προς τις δυνάμεις της παραμέτρου (από τη μεγαλύτερη δύναμη προς τη μικρότερη) και απαιτούμε όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων της παραμέτρου καθώς και ο σταθερός όρος να είναι ίσοι με το μηδέν. Το σύστημα αυτό θα έχει ως λύση το ίδιο σημείο που θα αποτελεί το ζητούμενο σταθερό σημείο.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 70, Άσκηση Β΄ 2.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1. Εάν ζητείται να βρεθεί η απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών, τότε βρίσκουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της μίας και στη συνέχεια υπολογίζουμε την απόστασή του από την άλλη ευθεία. Η απόσταση αυτή θα αποτελεί και την απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων

ευθειών.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 75, Άσκηση Α΄ 2.

2. Εάν δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $\mathbf{Ax + By + \Gamma_1 = 0}$, $\mathbf{Ax + By + \Gamma_2 = 0}$ και ζητείται η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των δύο ευθειών τότε η εξίσωσή της θα είναι η $\mathbf{Ax + By + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = 0}$. (Για να χρησιμοποιηθεί θα πρέπει πρώτα να αποδειχθεί). Ένας άλλος τρόπος είναι να βρούμε ένα σημείο της πρώτης, ένα σημείο της δεύτερης και στη συνέχεια να βρούμε το μέσο τους. Τότε η μεσοπαράλληλος θα έχει εξίσωση $\mathbf{Ax + By + \Gamma = 0}$ με **Α**, **Β**, γνωστά και **Γ** άγνωστο. Το μέσο που βρήκαμε θα ικανοποιεί την εξίσωση της μεσοπαραλλήλου και έτσι προσδιορίζουμε το **Γ**.

   Εφαρμογή : Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών **3x+4y-1=0** και **3x+4y+5=0**.

3. Εάν ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου δύο γνωστών ευθειών, τότε υποθέτουμε **Μ(x, y)** τυχαίο σημείο της διχοτόμου και απαιτούμε οι αποστάσεις του από τις δύο ευθείες να είναι ίσες. Από την εξίσωση αυτή προκύπτουν δύο ευθείες εκ των οποίων μία θα είναι η εξίσωση της διχοτόμου της οξείας γωνίας των δύο ευθειών και η άλλη η εξίσωση της διχοτόμου της αμβλείας γωνίας των δύο ευθειών. Για να βρούμε ποια θα είναι η εξίσωση της οξείας γωνίας των δύο ευθειών παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο της μίας ευθείας και υπολογίζουμε τις αποστάσεις του από τις δύο διχοτόμους. Η μικρότερη απόσταση θα αντιστοιχεί στη διχοτόμο της οξείας γωνίας των δύο ευθειών.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 76, Άσκηση Β΄ 8.

4. Εάν ζητείται να βρεθεί εμβαδόν τριγώνου με γνωστές κορυφές τότε χρησιμοποιώντας τον τύπο της θεωρίας υπολογίζουμε το ζητούμενο εμβαδόν.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 75, Άσκηση Α΄ 10.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. Να δοθεί ο ορισμός του συντελεστή διευθύνσεως μίας ευθείας.
2. Να δειχθεί ότι κάθε εξίσωση της μορφής **Αx+Βψ+Γ=0** με **Α** και **Β** όχι ταυτόχρονα μηδέν παριστάνει στο επίπεδο ευθεία και αντίστροφα.
3. Δίνεται η ευθεία **Αx+Βψ+Γ=0**. Να βρεθεί το παράλληλο και το κάθετο διάνυσμα στην ευθεία.
4. Να δοθούν οι τύποι της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου.
5. Δίνεται η εξίσωση **(x-3y+2)+λ(2x+y+1)=0 (1)** με $λ \in \Re$.
   α) Η εξίσωση παριστάνει ευθεία όταν : Α. **λ= – 1**. Β. **λ=3**. Γ. **λ=1** Δ. **λ=4** Ε. $λ \in \Re$.
   β) Οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση **(1)** διέρχονται πάντοτε από το σημείο : Α. **Κ(3, 1)** Β. **Λ(4, 0)** Γ. **Μ(-5/7, 3/7)** Δ. **Ν(-1, 2)** Ε. **P(1/2, 1/2)**.
6. Να σημειώσετε τα σωστό ή λάθος στις παρακάτω προτάσεις :
   α) Δίνεται η ευθεία **(ε)** : $\frac{x}{α} + \frac{ψ}{β} = 1$. Τότε η απόστασή της από την αρχή των αξόνων είναι $d = \frac{|αβ|}{\sqrt{α^2 + β^2}}$.
   β) Οι ευθείες **ψ=2x** και **ψ=-3x** σχηματίζουν γωνία 45^0.
   γ) Η εξίσωση **ψ-4=λ(x-3)** παριστάνει για τις διάφορες τιμές του **λ** όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο **Α(3, 4)**.

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. Δίνονται οι εξισώσεις **λx-y+1=0** και **(λ+1)x-(1-λ)y+4=0**.
   α) Αφού διαπιστωθεί ότι οι δύο εξισώσεις παριστάνουν εξισώσεις ευθειών να δειχθεί ότι κάθε μία διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.
   β) Να δειχθεί ότι υπάρχει ευθεία που ανήκει και στις δύο εξισώσεις ευθειών που έχουν δοθεί στο ερώτημα **α**.
2. Δίνεται ορθή γωνία **χΟψ** και τα μεταβλητά σημεία **Α** και **Β** των αξόνων **Οχ**, **Οψ** τέτοια ώστε **ΟΑ+ΟΒ=κ**, όπου **κ** σταθερά. Να δειχθεί ότι η μεσοκάθετος του τμήματος **ΑΒ** διέρχεται από σταθερό σημείο.

3. Ένας πεζοπόρος **Μ(κ, λ)** κινείται πάνω στην ευθεία **(ε)** : **y=x+2**. Ένας ποδηλάτης **Ν** κινείται στο ίδιο επίπεδο έτσι ώστε κάθε στιγμή να βρίσκεται σε μία θέση που ικανοποιεί την σχέση $\overrightarrow{MN} = \kappa\vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha} = (1,-1)$.
   α) Να βρεθεί η ευθεία πάνω στην οποία κινείται ο ποδηλάτης **Ν**.
   β) Εάν **Ρ** είναι ένας δεύτερος ποδηλάτης ο οποίος κινείται έτσι ώστε κάθε στιγμή $\overrightarrow{MP} = \lambda\vec{\alpha}$ να βρεθεί η σχέση των γραμμών που γράφουν οι **Ν**, **Ρ**.
   γ) Να βρεθεί το $|\overrightarrow{NP}|$ όταν **κ=2**.

4. Ενός παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ**, η πλευρά **ΑΒ** ανήκει στην ευθεία με εξίσωση **3x–7y+27=0** και η πλευρά **ΑΔ** στην ευθεία με εξίσωση **4x+y+5=0**. Οι διαγώνιοι **ΑΓ**, **ΒΔ** του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο **Κ(2, 5/2)**.
   α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή **Γ** έχει συντεταγμένες **(6,2)**.
   β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά **ΒΓ**.
   γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος **ΒΔ**.

5. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ***Oxy***, η εξίσωση ευθείας **(λ-1)x+(λ+1)y-λ-3=0**, όπου **λ** πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος **Φ**.
   α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.
   β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία **Κ(2, 2)**, **Λ(-1, 5)** και **Μ(1, 3)**. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτινών που διέρχονται από τα πλοία **Κ**, **Λ** και **Μ**.
   γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία **Κ** και **Λ** βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο **Μ**.
   δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο **Φ** και τα πλοία **Λ** και **Μ**.

6. Δίνεται η εξίσωση : $-x^2 + y^2 + 2x + 4y + \lambda - 1 = 0$.
   α) Να βρεθεί η τιμή του **λ** έτσι ώστε η εξίσωση να παριστάνει δύο ευθείες.
   β) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

7. Τα σχέδια κατασκευής του υπόγειου μετρό της Αθήνας σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων περιλαμβάνουν την γραμμή Γ_1 της οποίας κάθε σημείο είναι της μορφής **Α(λ+2, 3λ+1)**, $\lambda \in \Re$ και την γραμμή Γ_2 που

διέρχεται από τον σταθμό **Σ(-3, 2)** και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-10,5)$.

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών $Γ_1$ και $Γ_2$.

β) Στο σημείο **Ο(0,0)** πρόκειται να κατασκευασθεί το Ολυμπιακό Χωριό. Δεδομένου ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους γραμμής είναι το ίδιο να βρεθεί με ποια γραμμή πρέπει να συνδεθεί έτσι ώστε η γραμμή σύνδεσης να έχει το μικρότερο κόστος.

γ) Εάν το Ολυμπιακό Χωριό που θα κατασκευασθεί βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=5$ να εξετασθεί εάν υπάρχει ανάγκη σχεδίασης άλλης γραμμής προκειμένου να εξυπηρετηθούν οι Ολυμπιακοί Αγώνες του 2004.

8. Δίνεται το τρίγωνο **ΑΒΓ** με κορυφές τα σημεία **Α(2,4)**, **Β(4,0)** και **Γ(6,0)**. Να βρεθεί η ευθεία **(ε)** που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά μέρη.

9. Δίνεται η ευθεία **(ε)**: **ψ=2** και το σημείο της **Μ(2,2)**. Να βρεθούν δύο ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και τέμνουν την **(ε)** στα **Α**, **Β** αντίστοιχα έτσι ώστε το **Μ** να είναι μέσο του **ΑΒ** και το τρίγωνο **ΟΑΒ** να έχει εμβαδόν **10**.

10. Δίνεται η ευθεία **δ**: **x=4** και το σημείο **Α(2,0)**. Να βρεθούν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ διερχόμενες από το **Α**, κάθετες μεταξύ τους οι οποίες να τέμνουν την **δ** στα σημεία **Β**, **Γ** έτσι ώστε :

α) Το άθροισμα των αποστάσεων των **Β** και **Γ** από τον άξονα **x'x** να είναι **5** μονάδες.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΒΓ** να γίνεται ελάχιστο.

11. Δύο πλοία αναχωρούν από τα λιμάνια του Πειραιά και της Ραφήνας την $6^η$ πρωινή ώρα, κινούμενα ευθύγραμμα. Οι συντεταγμένες των πλοίων στο ραντάρ από το οποίο παρακολουθούνται είναι **Α(t+1,t-1)** και **Β(20-t,t+20)** αντίστοιχα, όπου **t** ο χρόνος σε ώρες που έχει περάσει από την στιγμή της αναχώρησής τους. Εάν ο Πειραιάς βρίσκεται στην θέση **Π(1,-1)** και η Ραφήνα στην θέση **Ρ(20,20)** τότε :

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα πλοία.

β) Να εξετάσετε εάν υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης των δύο πλοίων.

γ) Να βρεθεί ποιο πλοίο θα διέλθει πιο κοντά από την βραχονησίδα **Κ(2003, 2003)**.

δ) Να εξετάσετε εάν κάποιο πλοίο έχει την δυνατότητα χωρίς να εκτραπεί από την πορεία του να περισυλλέξει ναυαγούς που βρίσκονται στην θέση **Ν(2040,-2000)**.

12. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 + 2(2x + 2y + xy) = 5$.

α) Να δειχθεί ότι παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

β) Να βρεθεί η απόστασή τους.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου τους.

δ) Εάν τα σημεία **Ρ(κ, λ)** και **Σ(μ, ν)** κινούνται το ένα στην μία ευθεία και το στην άλλη να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου **ΡΜΣ** όπου $M(\frac{\kappa + \mu}{2} + 1, \frac{\lambda + \nu}{2} - 1)$, είναι σταθερό.

13. Δίνεται ορθή γωνία **xoy** και τα σημεία **Α(0,α)** και **Β(0, α/2)**, **α>0** στον άξονα **y'y**. Εάν **Μ(β,β)** με **β<α/2** είναι σημείο της ευθείας **y=x** τότε :

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών **ΑΜ**, **ΒΜ**.

β) Εάν οι ευθείες **ΑΜ**, **ΒΜ** τέμνουν τον άξονα **x'x** στα σημεία $K(0,x_1)$ και $\Lambda(0,x_2)$ να δειχθεί ότι ισχύει $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\alpha}$.

γ) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τους αριθμούς **α** και **β** έτσι ώστε τα τρίγωνα **ΟΑΚ** και **ΟΒΛ** να είναι ισεμβαδικά.

14. Σε μία επίπεδη πεδιάδα δύο σωλήνες άρδευσης τροφοδοτούνται από την παροχή μίας γεώτρησης που βρίσκεται στο σημείο **Μ(1,4)**. Οι διαδρομές των σωλήνων αυτών ακολουθούν τις ευθείες ε_1 : **y=-x+4** και ε_2 : **y=2x+3**. Ένας ευθύγραμμος αγωγός συνδέει την παροχή **Μ** με τους δύο σωλήνες άρδευσης στα σημεία τους **Α** και **Β**. Να βρεθεί η ευθεία η οποία πρέπει να ακολουθεί η διαδρομή του συνδετικού αγωγού ώστε το σημείο **Μ** να είναι το μέσο του.

15. Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** η κορυφή **Α** έχει συντεταγμένες **(3,5)** και δύο διάμεσοί του βρίσκονται πάνω στις ευθείες ε_1 : **4y=x+3** και ε_2 : **5y+4x=23**. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

16. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε ότι ένας ναύσταθμος είναι η αρχή **Ο** του συστήματος. Για την διεξαγωγή μίας άσκησης δεσμεύεται θαλάσσια περιοχή σχήματος τετραγώνου με κορυφές **Ο(0, 0)**, **Α(3, 4)**, **Β(μ, ν)** και **Γ(κ, λ)**, **κ>0**.

α) Να δειχθεί ότι : **3κ+4λ=0.**

β) Κατά την διάρκεια της άσκησης ένα πλοίο αναχωρεί από μία κορυφή και κατευθύνεται σε μία άλλη. Εάν οι συντεταγμένες του πλοίου την χρονική στιγμή **t**, $t \geq 0$, είναι **Π(4-t/2,7t/2-3)** να βρεθεί από πού αναχώρησε, σε ποια κορυφή κατευθύνεται, πόσο χρόνο θα κινηθεί και εάν βρίσκεται στην σωστή πορεία όλη την διάρκεια της κίνησής του.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Ι. ΚΥΚΛΟΣ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. **Εύρεση Εξίσωσης Κύκλου :**

α) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου με γνωστό κέντρο **Κ** και ο οποίος διέρχεται από γνωστό σημείο **Α**, τότε θα ισχύει ότι $|\overrightarrow{KA}| = \rho$ και έτσι η εξίσωση του κύκλου γίνεται γνωστή.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 i).

β) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου που διέρχεται από δύο αντιδιαμετρικά σημεία **Α**, **Β**, τότε θα έχουμε ότι το κέντρο του κύκλου θα είναι το μέσο του **ΑΒ** ενώ για την ακτίνα **ρ** θα ισχύει ότι $\rho = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{2}$.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 ii).

γ) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου με γνωστή ακτίνα **ρ** και ο οποίος διέρχεται από δύο γνωστά σημείο **Α** και **Β**, τότε θεωρούμε τη γενική μορφή του κύκλου $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και απαιτούμε να την επαληθεύουν τα σημεία **Α** και **Β**. Έτσι καταλήγουμε σε σύστημα δύο εξισώσεων ως προς x_0 και y_0. Λύνοντας το σύστημα προσδιορίζουμε το κέντρο και στη συνέχεια τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 iii).

δ) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου ο οποίος διέρχεται από τρία γνωστά σημείο **Μ**, **Λ** και **Ρ**, τότε θεωρούμε τη γενική μορφή του κύκλου $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και απαιτούμε να την επαληθεύουν τα τρία γνωστά σημεία. Έτσι καταλήγουμε σε σύστημα τριών εξισώσεων ως προς x_0, y_0 και **ρ**. Λύνοντας το σύστημα προσδιορίζουμε το κέντρο και την ακτίνα και κατά συνέπεια τη ζητούμενη εξίσωση. Ένας άλλος τρόπος είναι να θεωρήσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, να απαιτήσουμε η εξίσωση να ικανοποιείται από τα σημεία **Μ**, **Λ** και **Ρ** και έτσι να καταλήξουμε σε σύστημα ως προς **Α**, **Β** και **Γ**. Η λύση του συστήματος προσδιορίζει τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 iv).

ε) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου με γνωστό κέντρο **Κ** και ο οποίος εφάπτεται σε γνωστή ευθεία **(ε)**, τότε θα ισχύει ότι **d(K, (ε))=ρ**. Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε την ακτίνα **ρ** και έτσι και τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 1 iii).

στ) Ανάλογα με την υπόθεση του προβλήματος θα θεωρούμε τη γενική μορφή του κύκλου $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και θα καταλήγουμε σε σύστημα ως προς τους αγνώστους που έχουμε. (Συντεταγμένες κέντρου ή την ακτίνα). Η λύση κάθε φορά του συστήματος θα οδηγεί και στη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 vi), vii).

2. **Εύρεση Εξίσωσης Εφαπτομένης Κύκλου :**

α) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης κύκλου κέντρου **(0, 0)** σε γνωστό του σημείο $A(x_1, y_1)$, τότε (από θεωρία) η εφαπτομένη θα έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

β) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης κύκλου γνωστού κέντρου $K(x_0, y_0)$ σε γνωστό του σημείο $A(x_1, y_1)$, τότε θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της εφαπτομένης και απαιτούμε να ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AM}\overrightarrow{KM} = 0$. Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 88, Άσκηση Α΄ 7i).

γ) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης γνωστού κύκλου η οποία ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα αλλά δεν δίνεται το σημείο επαφής, τότε το υποθέτουμε ως $M(x_1, y_1)$ και από την ιδιότητα καθώς και από το ότι το σημείο **Μ** θα ικανοποιεί την εξίσωση του κύκλου, καταλήγουμε σε σύστημα ως προς x_1, y_1. Βρίσκοντας έτσι το σημείο επαφής προσδιορίζουμε και τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 2.

3. Εάν ζητείται να βρεθεί η σχετική θέση δύο γνωστών κύκλων, τότε εξετάζουμε το μήκος της διακέντρου τους σε σχέση με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο ακτινών. Ανάλογα με τη σύγκριση θα έχουμε και τη σχετική θέση των δύο κύκλων.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 88, Άσκηση Α΄ 8.

4. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι γνωστή ευθεία εφάπτεται σε γνωστό κύκλο, τότε αποδεικνύουμε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τη δοσμένη ευθεία είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Β΄ 2.

5. Δίνεται γενική μορφή εξίσωσης κύκλου συναρτήσει παραμέτρου με την παράμετρο να διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι όλοι αυτοί οι κύκλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο (ή από τα ίδια σημεία) για κάθε τιμή της παραμέτρου, τότε ανακατασκευάζουμε την εξίσωση ως προς τις δυνάμεις της παραμέτρου (από τη μεγαλύτερη δύναμη προς τη μικρότερη) και απαιτούμε όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων της παραμέτρου καθώς και ο σταθερός όρος να είναι ίσοι με το μηδέν. Το σύστημα αυτό θα έχει ως λύση τα ζητούμενα σταθερά σημεία.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 129, Γενικές Ασκήσεις 1.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

1. Να γράψετε και να αποδείξετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο **Κ(0, 0)** και ακτίνα **ρ**.

2. Να γράψετε και να αποδείξετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $\mathbf{K(x_0, y_0)}$ και ακτίνα **ρ**.

3. Να εξετασθεί πότε η εξίσωση $\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}$ παριστάνει κύκλο. Να βρεθεί το κέντρο του και η ακτίνα του.

4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη **ε** του κύκλου **C:** $\mathbf{x^2+y^2=\rho^2}$ σε ένα σημείο του $\mathbf{A(x_1, y_1)}$ έχει εξίσωση $\mathbf{xx_1+yy_1=\rho^2}$.

5. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνεται ο κύκλος $\mathbf{x^2+y^2=10}$ και το σημείο του **Μ(1, -3)**. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο **Μ** έχει εξίσωση: **Α. x+3y=10**, **Β. 5x-y=8**, **Γ. x-3y=10**, **Δ. 3x+2y=3**, **Ε. x+y=5**

6. Στη Στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη Στήλη Β τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2+y^2-6x+4y-3=0$	1. K (0, -1), ρ=2
β. $x^2+(y+1)^2=4$	2. K (3, -2), ρ=1
	3. K (3, -2), ρ=4

7. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
   α) Το σημείο **(1, -1)** ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=2$.
   β) Ο κύκλος $x^2+y^2=4$ και η ευθεία $y=2x$ εφάπτονται.
   γ) Η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda^2=0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

1. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2+y^2=\rho^2$ και η εφαπτομένη του **(ε)** στο σημείο του $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$. Εάν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες στα σημεία **Α** και **Β** και $M(x_M, y_M)$ είναι το μέσο του **ΑΒ** να δειχθεί ότι $\dfrac{1}{x_M^2}+\dfrac{1}{y_M^2}=\dfrac{4}{\rho^2}$.
2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων με εξίσωση : $x^2+y^2+2\lambda^2x-8\lambda y+\lambda^2=0$ με $\lambda\in\Re^*$.
3. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x\sigma\upsilon\nu\theta-2y\eta\mu\theta-1=0$, $0\le\theta<2\pi$.
   α) Να αποδείξετε ότι για κάθε **θ** η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
   β) Εάν $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο **Μ(1, 2)**.
   γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του **θ** τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο **Ο(0, 0)** και ακτίνα **ρ=1**.

4. Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι C_1 : $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ και C_2 : $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ με **K** το κοινό κέντρο. Εάν για τα σημεία **M** και **N** των δύο κύκλων αντίστοιχα ισχύει ότι $(\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KN})=\frac{2\pi}{3}$ τότε :
   - **α)** Να βρεθεί η τιμή του $x\in\Re$ ώστε $\overrightarrow{KM}\perp\vec{\gamma}$ με $\vec{\gamma}=x\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KN}$.
   - **β)** Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta},\overrightarrow{KN}$ με $\vec{\delta}=3\overrightarrow{KM}+2\overrightarrow{KN}$ και **K** το κοινό κέντρο.
5. Το μετρό μίας πόλης αποτελείται από **20** γραμμές, κάθε μία από τις οποίες περιγράφεται από την εξίσωση : $x^2+y^2=2\lambda(x+y),\quad \lambda=1,2,3,.......20$.
   - **α)** Να δειχθεί ότι όλες οι γραμμές είναι κύκλοι και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα τους.
   - **β)** Να δειχθεί ότι μπορεί να κατασκευασθεί ένας μόνο σταθμός από τον οποίο ένας επιβάτης μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε γραμμή.
   - **γ)** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα όλων των κύκλων καθώς επίσης και την μέγιστη δυνατή απόσταση δύο σταθμών του μετρό.
6. Φορτηγό πλοίο κινούμενο στον Ατλαντικό εξέπεμψε S.O.S. από περιοχή η περίμετρος της οποίας περιγράφεται από την εξίσωση : $36x^2+36y^2-28x-72y+611=0$. Εάν οι συντεταγμένες του ναυαγοσωστικού που ξεκίνησε από το πλησιέστερο προς την περιοχή λιμάνι είναι $N(2t+1,3t+2),\quad t\geq 0$ τότε :
   - **α)** Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία κινείται το ναυαγοσωστικό.
   - **β)** Να εξετασθεί εάν είναι σωστή η πορεία του ναυαγοσωστικού.
   - **γ)** Να βρεθεί μεταξύ ποιων ημιευθειών με αρχή το λιμάνι θα πρέπει να βρίσκεται η πορεία του ναυαγοσωστικού ώστε να βρεθεί στην περιοχή του ναυαγίου.
7. Δίνονται δύο σημεία **A** και **B** του επιπέδου.
   - **α)** Να βρεθεί σημείο **K** τέτοιο ώστε να ισχύει $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.
   - **β)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2-3\overrightarrow{MK}^2$ είναι σταθερό για οποιοδήποτε σημείο **M** του επιπέδου.

γ) Εάν ισχύει $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2001$ να αποδείξετε ότι το σημείο **Μ** για το οποίο ισχύει $2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{AB}^2$ κινείται σε κύκλο με κέντρο το σημείο **Κ** και ακτίνα **667**.

8. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία (ε_1) : $x+y+13=0$ και στην (ε_2) : $7x-y-5=0$ στο σημείο της $A(1, 2)$.

9. Δίνονται οι κύκλοι C : $x^2 + y^2 + \lambda x - (3\lambda + 10)y = 0, \ \lambda \in \Re$.

α) Να δειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι αυτής της οικογένειας διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα δύο σταθερά σημεία και το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

10. Δίνονται η ευθεία ε : $y = x + 2$ και ο κύκλος C : $x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y = 0, \ \lambda \in \Re$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του **λ** ώστε η ευθεία να τέμνει τον κύκλο.

β) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η χορδή που ορίζει η ευθεία ε στον κύκλο να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου **μ**, **λ** πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των **μ**, **λ**, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων **Ο**.

β) Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς **μ**, **λ** ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

ι) Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$ για τις διάφορες τιμές των **μ** και **λ**, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ιι) Να βρείτε τα **μ**, **λ** έτσι, ώστε, αν **Α**, **Β** είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x+y+2=0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

ιιι) Για τις τιμές των **μ**, **λ** που βρήκατε στο ερώτημα **ιι)** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΟΒ**.

12. Εάν τα σημεία $A(\alpha_1, \alpha_2)$ και $B(\beta_1, \beta_2)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία ενός κύκλου που εφάπτεται του άξονα **y'y** να δειχθεί ότι $(\alpha_2-\beta_2)^2=4\alpha_1\beta_1$.

13. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=4$. Να βρεθεί σημείο **Μ** του κύκλου τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη του κύκλου στο **Μ** να τέμνει τους θετικούς ημιάξονες στα σημεία **Α** και **Β** και να ισχύει $|\overrightarrow{AB}| = 4$.

14. Δίνονται οι κύκλοι K_1 : $x^2+y^2-4x=0$ και K_2 : $x^2+y^2-10x=0$. Μία μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το **Ο(0, 0)** τέμνει τους κύκλους στα σημεία **Α** και **Β**.

   α) Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των κύκλων στα σημεία **Α** και **Β** αντίστοιχα είναι παράλληλες.

   β) Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία κινείται το μέσο του τμήματος **ΑΒ**.

15. Έστω το σημείο **Α(2, 0)**. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής **Β** του τριγώνου **ΟΑΒ** έτσι ώστε η διάμεσός του **ΟΔ** να είναι ίση με **1**.

ΙΙ.ΠΑΡΑΒΟΛΗ – ΕΛΛΕΙΨΗ - ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. **Εύρεση Εξίσωσης Παραβολής – Έλλειψης - Υπερβολής :**

   Ανάλογα με την υπόθεση του προβλήματος θα προσδιορίζουμε για κάθε κωνική τομή τη θέση της ως προς τους άξονες και την τιμή των απαιτούμενων παραμέτρων (**p** για την παραβολή, **α** και **β** για την έλλειψη και την υπερβολή).

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 99, Άσκηση Α΄ 1, Σελίδα 111, Άσκηση Α΄ 1, Σελίδα 122, Άσκηση Α΄ 1.

2. **Εύρεση Εξίσωσης Εφαπτομένης Παραβολής–Έλλειψης-Υπερβολής :**

   α) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης Παραβολής – Έλλειψης - Υπερβολής σε γνωστό σημείο $A(x_1,\ y_1)$, τότε (από θεωρία) η εφαπτομένη θα έχει αντίστοιχα εξίσωση $yy_1=p(x+x_1)$, $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$, $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$ ή $xx_1=p(y+y_1)$, $\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1$, $\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1$ (Ανάλογα με τη θέση της κωνικής τομής ως προς τους άξονες).

   β) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης γνωστής Παραβολής – Έλλειψης - Υπερβολής η οποία ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα αλλά δεν δίνεται το σημείο επαφής, τότε το υποθέτουμε ως $M(x_1,\ y_1)$ και από την ιδιότητα καθώς και από το ότι το σημείο **Μ** θα ικανοποιεί την εξίσωση της δοθείσης κωνικής τομής, καταλήγουμε σε σύστημα ως προς x_1, y_1. Βρίσκοντας έτσι το σημείο επαφής προσδιορίζουμε και τη ζητούμενη εξίσωση.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 99, Άσκηση Α΄ 5, Σελίδα 112, Άσκηση Α΄ 6, Σελίδα 123, Άσκηση Α΄ 7.

3. Εάν δίνεται εξίσωση Παραβολής – Έλλειψης – Υπερβολής και ζητείται να δειχθεί κάποια άλλη σχέση (γεωμετρική ή μη) τότε κάνουμε ένα πρόχειρο σχήμα, θέτουμε τα άγνωστα σημεία με υποτιθέμενα ζεύγη συντεταγμένων, χρησιμοποιούμε τις άγνωστες συντεταγμένες ως γνωστές και ανάλογα με την υπόθεση του προβλήματος θα καταλήγουμε στο ζητούμενο.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 100, Άσκηση Β΄ 2, Σελίδα 112, Άσκηση Β΄ 6, Σελίδα 124, Άσκηση Β΄ 4.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ-ΕΛΛΕΙΨΗΣ-ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

1. Να δοθούν οι ορισμοί της παραβολής της έλλειψης και της υπερβολής.

2. Να γραφούν οι εξισώσεις της παραβολής της έλλειψης και της υπερβολής για όλες τις περιπτώσεις.

3. Να σημειώσετε το σωστό ή λάθος στα παρακάτω :

α) Εάν (M_1M_2) διάμετρος της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta$ τότε $2\beta \le (M_1M_2) \le 2\alpha$.

β) Στην παραβολή $y^2=2px$ η παράμετρος p και οι τετμημένες x είναι ετερόσημες.

γ) Έστω η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Τότε για την εκκεντρότητά της ε ισχύει ότι $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

δ) Για την υπερβολή $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ οι ευθείες $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$ είναι ασύμπτωτες αυτής.

ε) Στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta$ ισχύει ότι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ ενώ στην υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ισχύει ότι $\gamma^2=\beta^2+\alpha^2$.

4. Στη Στήλη Α δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη Στήλη Β εξισώσεις εφαπτόμενων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1, y_1). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2+y^2=\rho^2$	1. $yy_1=p(x+x_1)$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$	2. $xx_1+yy_1=\rho^2$
γ. $y^2=2px$	3. $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$	4. $xx_1+yy_1=1$

	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ – ΕΛΛΕΙΨΗΣ - ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

1. Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με **α>β** μία έλλειψη. Το εμβαδόν του δακτυλίου που σχηματίζεται από τους κύκλους με κέντρο το **(0, 0)** και διαμέτρους **2α** και **2β** αντίστοιχα είναι **9π**. Εάν $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{5}$ να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης.
2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$.
   α) Να δειχθεί ότι παριστάνει εξίσωση κύκλου του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
   β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας **y=λx** ώστε να αποτελεί εφαπτόμενη του κύκλου.
   γ) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες του ερωτήματος **β)** και επιπλέον ισχύει ότι $\beta^2 = \alpha^2 + 2$.
3. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$. Να βρεθούν :
   α) Η εστία και η διευθετούσα της παραβολής.
   β) Οι ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x-1$.
4. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και έστω **Μ**(x_0, y_0) σημείο της με θετική τεταγμένη. Εάν **Α** είναι η προβολή του **Μ** στην διευθετούσα και το τρίγωνο **ΜΑΕ** όπου **Ε** η εστία της έχει εμβαδό **2** τ.μ., να βρεθεί το σημείο **Μ**.
5. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 2px$ και δύο χορδές της **ΟΒ**, **ΟΓ** τέτοιες ώστε **ΒΟΓ**$=90^0$. Να δειχθεί ότι η ευθεία **ΒΓ** διέρχεται από σταθερό σημείο.

6. Η παραβολή με εξίσωση $y^2=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο **Α(2, 4)**, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο **Ε(2, 0)**.

β) Έστω **Ε΄** το συμμετρικό της εστίας **Ε** ως προς τον άξονα **y΄y**. Εάν **Μ(x, y)** είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME'}\overrightarrow{ME}$ να δειχθεί ότι το σημείο **Μ(x, y)** ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων **Ο(0, 0)** και ακτίνα **2**.

γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο **Α**.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2-y^2+6x+9=0$.

α) Να δειχθεί ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2.

β) Να δειχθεί ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

γ) Να βρεθεί ένα σημείο **Μ(κ, λ)** με $\kappa>0$ και $\lambda>0$ τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta}=(-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

δ) Να γραφεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων **Ο**, άξονα συμμετρίας τον άξονα **x΄x** και διέρχεται από το σημείο **Μ**.

8. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και έστω $M(x_0, y_0)$ σημείο της με θετική τεταγμένη. Εάν **Α** είναι η προβολή του **Μ** στην διευθετούσα και το τρίγωνο **ΜΑΕ** όπου **Ε** η εστία της παραβολής έχει εμβαδόν **2**, να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου **Μ**.

9. Να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ το οποίο διέρχεται από την εστία **Ε(γ, 0)** και είναι κάθετο στον μεγάλο ημιάξονά της.

10. Δίνεται η υπερβολή $x^2-y^2=12$ και ένα σημείο της **Ρ**. Εάν **Μ** είναι το μέσο του τμήματος **ΟΡ** να δειχθεί ότι καθώς το **Ρ** κινείται στην υπερβολή το σημείο **Μ** κινείται επίσης σε υπερβολή.

11. Εάν για τους αριθμούς x_1, x_2, y_1, y_2 ισχύουν ότι $9x_1^2+16y_1^2=144$ και $9x_2^2+16y_2^2=144$ να δειχθεί ότι $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \leq 64$.

12. Ένα σημείο **Μ(x, y)** κινείται έτσι ώστε η απόστασή του από το σημείο **Ε(5, 0)** να είναι ίση με τα **5/3** της απόστασής του από την ευθεία **(ε) : x=9/5**.

α) Να δειχθεί ότι το σημείο **Μ** κινείται σε υπερβολή.

β) Εάν **Κ, Λ** είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία **(ε)** τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου **ΟΚΛ**.

13. Δίνεται η έλλειψη $x^2+2y^2=2$. Να δειχθεί ότι οι ευθείες που διέρχονται από τις εστίες της και είναι παράλληλες προς την ευθεία $x-y+7=0$ τέμνουν την έλλειψη σε τέσσερα σημεία που είναι συμμετρικά ανά δύο ως προς το κέντρο της έλλειψης.

14. Δίνονται οι παραβολές $\Pi_1 : y=x^2$, $\Pi_2 : x=y^2$ και τα σημεία τους **Α**, **Β** αντίστοιχα. Από το **Α** φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία **ε** και από το **Β** οριζόντια ευθεία **ζ** οι οποίες τέμνονται στο σημείο **Γ**.

α) Να εκφρασθούν οι συντεταγμένες του σημείου **Α** συναρτήσει της τετμημένης **x** του **Α** και οι συντεταγμένες του σημείου **Β** συναρτήσει της τεταγμένης **y** του **Β**.

β) Εάν τα **Α** και **Β** μεταβάλλονται ώστε η ευθεία ΑΒ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-x$ να βρεθεί η εξίσωση και το είδος της καμπύλης στην οποία κινείται η κορυφή **Γ** του τριγώνου **ΑΒΓ**.

15. Από ένα σημείο **Μ** άγονται δύο εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής έχει εξίσωση $2x-3y-4=0$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου **Μ**.

16. Έστω η παραβολή $y^2=2px$ και το σημείο της $A(x_1, y_1)$. Να δειχθεί ότι η απόσταση **ΑΕ** είναι ίση με $(AE)=|x_1|+\frac{|p|}{2}$.

17. Έστω τα διαφορετικά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ της παραβολής $y^2=2px$. Δίνεται ότι η ευθεία **ΑΒ** διέρχεται από την εστία **Ε** της παραβολής.

α) Να δειχθεί ότι $y_1y_2=-p^2$.

β) Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}$ =σταθερό.

γ) Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία **Α** και **Β** τέμνονται κάθετα και μάλιστα πάνω στη διευθετούσα της παραβολής.

18. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$. Μία τυχαία εφαπτομένης της τέμνει τις ευθείες $x=-\alpha$ και $x=\alpha$ στα σημεία **Κ** και **Λ** αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι ο κύκλος διαμέτρου **ΚΛ** διέρχεται από μία εστία της έλλειψης.

19. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$ και η παραβολή $y^2=2px$ με $p>0$.

α) Να δειχθεί ότι η έλλειψη και παραβολή τέμνονται σε δύο σημεία **Α** και **Β**.

β) Εάν οι εφαπτόμενες της έλλειψης και της παραβολής στο σημείο **Α** τέμνονται κάθετα, να δειχθεί ότι $\alpha=\beta\sqrt{2}$.

20. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$ και **Ε**, **Ε΄** οι εστίες της. Εάν Μ τυχαίο σημείο της έλλειψης να δειχθεί ότι $\overrightarrow{ME}\,\overrightarrow{ME'}\geq 2\beta^2-\alpha^2$.

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Εάν ζητείται να δειχθεί ισότητα ή ανίσωση η οποία να ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο (ή για κάθε θετικό ακέραιο $\geq \nu_0$) τότε χρησιμοποιούμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 139, Άσκηση Α΄ 1, Σελίδα 140, Άσκηση Β΄ 2.

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

1. Εάν ζητείται να δειχθεί μία σχέση που αφορά σε άρτιους ή περιττούς τότε θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής :
   - **α)** Κάθε περιττός α έχει τη μορφή $\alpha=2\kappa+1$ ενώ κάθε άρτιος α έχει τη μορφή $\alpha=2\kappa$ με $\kappa\in \mathbb{Z}$.
   - **β)** Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος, το άθροισμα δύο άρτιων είναι άρτιος, το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός, το γινόμενο δύο άρτιων είναι άρτιος, το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός και τέλος το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού είναι άρτιος.
   - **γ)** Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος ενώ το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου α είναι της μορφής $\alpha^2=8\rho+1$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 144, Άσκηση Α΄ 3, Σελίδα 145, Άσκηση Β΄ 5.
2. Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν από τους όρους της διαίρεσης ή όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας ακέραιος έχει κάποια ορισμένη μορφή ή όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάποιο γινόμενο ακεραίων είναι διαιρετό από ένα ακέραιο.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 144, Άσκηση Α΄ 2, Σελίδα 145, Άσκηση Β΄ 1.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

1. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι ένας ακέραιος α διαιρεί μία ακέραια παράσταση $f(\alpha)$, τότε μετασχηματίζουμε την παράσταση $f(\alpha)$ σε

γινόμενο της μορφής **$f(α)=αg(α)$**.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 149, Άσκηση Α΄ 3, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 1, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 6.

2. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι μία ακέραια παράσταση **$g(α)$** διαιρεί μία ακέραια παράσταση **$f(α)$**, τότε μετασχηματίζουμε την παράσταση **$f(α)$** σε γινόμενο της μορφής **$f(α)=π(α)g(α)$**.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 4.

3. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι μία ακέραια παράσταση **g** διαιρεί μία ακέραια παράσταση **f** και η παράσταση **f** δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί, τότε προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η **g** διαιρεί μία από τις παραστάσεις **$f+κg$** ή **$f-κg$**, $κ \in \mathbb{Z}$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 7.

4. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι ένας ακέραιος **$α$** δεν διαιρεί έναν άλλο ακέραιο **$β$**, τότε υποθέτουμε ότι ο ακέραιος **$α$** διαιρεί τον ακέραιο **$β$** και καταλήγουμε σε άτοπο.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 149, Άσκηση Α΄ 5, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 2.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Έστω $α$, $β$, $γ$ ακέραιοι αριθμοί. Να δειχθεί ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες :
   α) Εάν $α|β$, τότε $α|λβ$ για κάθε ακέραιο $λ$.
   β) Εάν $α|β$ και $α|γ$, τότε $α|(β+γ)$.
   γ) Εάν $α|β$ και $β\neq 0$ τότε $|α| \leq |β|$.
   δ) Εάν $α|β$ και $β|α$ τότε $α=β$ ή $α=-β$.
   ε) Εάν $α|β$ και $β|γ$ τότε $α|γ$.
2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
   α) Εάν $7\ |(α+5)$ και $7\ |(40-β)$ τότε : **Α**. $7\ |(α+β)$, **Β**. $7\ |(α+β+1)$, **Γ**. $7\ |(α+β+2)$, **Δ**. $7\ |(α+β-3)$.
   β) Ο αριθμός $Α=(3κ+5)(3κ+8)$, κ ακέραιος είναι : **Α**. άρτιος, **Β**. περιττός, **Γ**. άρτιος μόνο όταν $κ=2ν$ με $ν$ ακέραιο.
3. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

α) Ο αριθμός $2^{222}-2^{99}-2$ είναι πολλαπλάσιο του **3**.

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $(19^{κ}+10^{λ}):9$ όπου **κ**, **λ** θετικοί ακέραιοι είναι **1**.

γ) Το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

δ) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε περιττός ακέραιος αριθμός.

ε) Εάν οι αριθμοί **α**, **β**, **γ** είναι περιττοί ακέραιοι τότε το γινόμενο $(α^2-β^2)(β^2-γ^2)(γ^2-α^2)$ είναι πολλαπλάσιο του **512**.

στ) Η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

ζ) Για κάθε ακέραιο **α** ισχύει ότι $α(α^2+2)=πολ.3$

4. Να γραφεί η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης για δύο φυσικούς **α** και **β** με **α>β**.

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Έστω **x** φυσικός αριθμός.

   α) Να δειχθεί ότι ο αριθμός $α = x^3 + 3x$ είναι άρτιος.

   β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2^{x-1} + 3 = x^3 + 3x$ έχει στο N^* μοναδική λύση η οποία και να βρεθεί.

2. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί **α**, **β** για τους οποίους ισχύει ότι $4(3α+β+4)=7(α+β+2)$. Να δειχθούν τα ακόλουθα :

   α) $α=3κ+2$ και $β=5κ+4$, $κ\in Z$.

   β) Η διαίρεση $5α-β/10$ δίνει υπόλοιπο **6**.

   γ) Εάν $κ=πολ.5$ τότε $3+β+2α=πολ.11$.

   δ) Ο αριθμός $\dfrac{β^2-α^2}{4}$ είναι ακέραιος.

3. Έστω **α** ακέραιος.

   α) Να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{α\left(α^2+1\right)}{2}$ είναι ακέραιος.

   β) Εάν ο **α** είναι περιττός ακέραιος, να δειχθεί ότι ο $\dfrac{α\left(α^2+1\right)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

4. Δίνεται η εξίσωση $(2x+1)^2+(2y+1)^2=100$.

   α) Να δειχθεί ότι παριστάνει εξίσωση κύκλου του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

β) Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει σημείο αυτού του κύκλου με ακέραιες συντεταγμένες.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό **λ** με τον οποίο όταν διαιρεθούν οι αριθμοί **43** και **78** αφήνουν υπόλοιπο **1**.

6. Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $\alpha=6\kappa+\upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$ και **κ** ακέραιος. Να δειχθεί ότι :

α) Οι παραπάνω ακέραιοι **α** που δεν είναι πολλαπλάσια του **2** ή του **3** παίρνουν τη μορφή $\alpha=6\kappa+1$ ή τη μορφή $\alpha=6\kappa+5$, όπου **κ** ακέραιος.

β) Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος **(α)** μπορεί να πάρει τη μορφή : $\alpha^2=3\mu+1$, όπου **μ** ακέραιος.

γ) Η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος **(α)** είναι πολλαπλάσιο του **3**.

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο **ν** ισχύει ότι :

α) $3^{3\nu}+51=\pi o\lambda\ 26$.

β) $3^{3\nu}-1=\pi o\lambda\ 26$.

8. Εάν **x**, **y**, **ρ** ακέραιοι και οι αριθμοί x^3-y και y^3-x είναι πολλαπλάσια του **ρ** να δειχθεί ότι οι διαιρέσεις των yx^3+xy^3 και x^2+y^2 με το **ρ** δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

9. Εάν **α** ακέραιος να δειχθεί ότι ο αριθμός $3\alpha-2$ δεν είναι πολλαπλάσιο του **6**.

10. Έστω **α**, **β** ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε ο αριθμός $13-\alpha$ να είναι διαιρέτης του $11\alpha+13\beta$. Να δειχθεί ότι $(13-\alpha)|(13+\alpha)(11+\beta)$.

11. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι **α**, **β** για τους οποίους ισχύει ότι : $(13+15\beta)(5\alpha+7\beta-15)=56$.

12. Να βρεθούν τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού $2001^{\kappa}+99^{2\nu+1}$ με **κ**, **ν** φυσικοί διαφορετικοί του μηδενός.

13. Έστω **α**, **β** δύο ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους ισχύει ότι $10\alpha+\beta=\pi o\lambda 7$. Να δειχθεί ότι :

α) $3\alpha+\beta=\pi o\lambda 7$.

β) Εάν $\alpha=\beta$ τότε $\alpha=\pi o\lambda 7$.

γ) Εάν $\alpha\neq\beta$ τότε το κλάσμα $\dfrac{2\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}$ απλοποιείται με το **7**.

14. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι **α**, **β**, **γ** εάν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός **α** διαιρούμενος με το **β** δίνει πηλίκο **7** και υπόλοιπο **2**, ενώ η διαίρεση του **γ** με το **12** δίνει πηλίκο **α** και υπόλοιπο **3β**.

15. Να δειχθεί ότι για κάθε ακέραιο **κ** ο αριθμός $\dfrac{(\kappa^3-\kappa)(2\kappa^2+5\kappa-3)}{5}$ είναι ακέραιος.

16. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι **α**, **β** τέτοιοι ώστε $4\alpha^2-\beta^2=2201$.

17. Ένας ακέραιος αριθμός **α** όταν διαιρείται με το **3** δίνει υπόλοιπο **1**, ενώ όταν διαιρείται με το **5** δίνει υπόλοιπο **3**. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του **α** με το **15**.

18. Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο **ν** ο αριθμός $6^{2\nu}+3^{\nu+2}+3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του **11**.

19. Έστω **α**, **β** ακέραιοι τέτοιοι ώστε $3\alpha-\beta=\pi o\lambda 5$. Να δειχθεί ότι ο αριθμός **25** είναι διαιρέτης του αριθμού $3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2$.

20. Να βρεθούν δύο ακέραιοι **α**, **β** με άθροισμα **420** εάν είναι γνωστό ότι για τα πηλίκα π_1, π_2 των διαιρέσεων $\alpha:15$ και $\beta:12$ ισχύει ότι $\pi_1-\pi_2=8$.

21. Να βρεθεί ο θετικός ακέραιος **α** όταν γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί **492** και **417** διαιρούμενοι με το **α** αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο **12**.

22. Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι $\alpha=2\kappa^2+3$ και $\beta=4\kappa-1$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι εάν ο αριθμός $(\alpha+\beta)|8$ είναι ακέραιος τότε ο **κ** είναι περιττός.

23. Να δειχθεί ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει ότι : $\sqrt[\nu]{\nu}\le\sqrt[3]{3}$.

24. Θεωρούμε δύο ακέραιους αριθμούς **α** και **β** και τους αριθμούς $x=3\alpha+4\beta$ και $y=2\alpha+\beta$. Να δειχθεί ότι $5|x$ εάν και μόνο εάν $5|y$.

25. Να δειχθεί ότι για κάθε **α**, **υ** ακέραιους και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει ότι : $(\pi o\lambda.\alpha+\upsilon)^{\nu}=\pi o\lambda.\alpha+\upsilon^{\nu}$.

26. Έστω οι θετικοί ακέραιοι **α** και **β** τέτοιοι ώστε $\beta=\alpha^2+81$.

α) Να βρεθούν τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του **β** με το **4**.

β) Εάν ισχύει ότι $\beta=x^2$, $x\in\mathbb{N}^*$, να βρεθεί ο αριθμός **β**.

27. Έστω οι ακέραιοι $\alpha=\nu^2+2\nu$ και $\beta=\nu+4$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

α) Να δειχθεί ότι ο ακέραιος **α+β** είναι άρτιος.

β) Εάν $\beta|\alpha$ να βρεθεί κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

28. Έστω ο ακέραιος $\alpha=6\kappa+15$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

α) Να βρεθούν τα υπόλοιπα της διάιρεσης του **α** με το **3** και με το **6**.

β) Να δειχθεί ότι ο α^2 είναι της μορφής $\alpha^2=72\mu+9$, $\mu\in\mathbb{Z}$.

γ) Να βρεθούν τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης του **α** με το **12**.

29. Έστω $\mathbf{v \in N^*}$ και $\mathbf{\alpha=v^2+v+1}$, $\mathbf{\beta=v^2-v+1}$.

α) Να δειχθεί ότι ο αριθμός **α** είναι περιττός.

β) Εάν $\mathbf{\delta \in N^*}$ με $\mathbf{\delta|\alpha}$ και $\mathbf{\delta|\beta}$, να δειχθεί ότι $\mathbf{\delta=1}$.

30. Έστω οι ακέραιοι $\mathbf{\alpha=3\kappa+5}$ και $\mathbf{\beta=3\lambda+7}$ με $\mathbf{\kappa, \lambda \in Z}$.

α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{\alpha^2-\beta^2=}$**πολ.3**.

β) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathbf{\alpha^2+\beta^2}$ με το **3**.

5. ΓΕΝΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 4$. Εάν η γωνία των διανυσμάτων αυτών είναι αμβλεία και η εξίσωση $|x\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2\sqrt{3}$ έχει διπλή ρίζα να υπολογισθεί το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.
2. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** και σημείο **Ο** του επιπέδου του τριγώνου, για το οποίο ισχύει ότι $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{O\Gamma}| = 1$ και $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = \vec{0}$.

   α) Να υπολογισθεί η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.

   β) Να δειχθεί ότι το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι ισόπλευρο.
3. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $|\vec{AB}| = 4$, $|\vec{A\Gamma}| = 6$, **Μ** το μέσο της πλευράς **ΒΓ** και η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ ίση με $\frac{\pi}{3}$.

   α) Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{AM}$.

   β) Να βρεθεί το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\vec{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{AM}$.
4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,\ 1)$ και $\vec{\beta} = (1,\ -1)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}$ συνεπίπεδο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για το οποίο ισχύουν τα ακόλουθα : i) $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$, ii) Σχηματίζει αμβλεία γωνία με το διάνυσμα $\vec{\beta}$ και iii) $|\vec{\gamma}| = |\vec{\alpha}|$.
5. Δίνονται τα σημεία **Μ(x, y)** του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{OM}|^2 = 3 + 2y$ (όπου **Ο** η αρχή των αξόνων).

   α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων **Μ**.

   β) Δίνονται τα σημεία **Α(0, -1)** και **Β(0, 3)**. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $P = |\vec{AM}|^2 + |\vec{BM}|^2$.

   γ) Δίνεται το σημείο **Γ(-3, 5)**. Να δειχθεί ότι $3 \le |\vec{\Gamma M}| \le 5$.
6. Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι C_1 : $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ και C_2 : $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$. Εάν για τα σημεία **Μ** και **Ν** των δύο κύκλων

αντίστοιχα ισχύει ότι $(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KN}) = \frac{2\pi}{3}$, όπου **K** το κοινό κέντρο, τότε :

α) Να βρεθεί η τιμή του $x \in \Re$ ώστε $\overrightarrow{KM} \perp \vec{\gamma}$ με $\vec{\gamma} = x\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN}$.

β) Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta}, \overrightarrow{KN}$ με $\vec{\delta} = 3\overrightarrow{KM} + 2\overrightarrow{KN}$ και **K** το κοινό κέντρο.

7. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = (5,7)$ και το $\vec{v} = (x, y)$ με **x**, **y** θετικοί ακέραιοι. Εάν **μ** θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης των **94**, **311** με αυτόν να είναι **1** και $\vec{u}\vec{v} = \mu$ να βρεθεί το $\vec{v}$ όταν $\lambda_{\vec{v}} = \frac{3}{2}$.

8. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων **Oxy** δίνονται τα σημεία $A(2, -\alpha-4)$ και $B(\alpha+1, \alpha^2-1)$, $\alpha \neq -1$.

α) Να δειχθεί ότι για κάθε ακέραια τιμή του $\alpha \neq -1$ τα σημεία **O**, **A**, **B** ορίζουν τρίγωνο.

β) Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου **OAB** είναι ακέραιος αριθμός.

γ) Να εξετασθεί εάν υπάρχει ακέραια τιμή του **α** για την οποία το τρίγωνο **AOB** είναι ορθογώνιο στο **O**.

9. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με κορυφές τα σημεία **Α(2, 6)**, **Β(0, 0)** και **Γ(5, 5)**.

α) Να βρεθεί το συμμετρικό **Α'** της κορυφής **Α** ως προς την πλευρά **ΒΓ**.

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο **Α'** ο οποίος εφάπτεται της πλευράς **ΑΓ**.

γ) Να βρεθεί η $\text{προβ}_{\vec{B\Gamma}}\overrightarrow{BA}$.

10. Έστω η γραμμή : $\lambda x+(2\lambda-1)y+3\lambda+5=0$ **(1)**, $\lambda \in \Re$.

α) Να δειχθεί ότι η **(1)** παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο.

β) Να βρεθεί το **λ** ώστε η ευθεία να απέχει από το σημείο **(0, 0)** τη μικρότερη απόσταση.

11. Έστω το τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\overrightarrow{AB} = (4, 3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3, 1)$.

α) Να βρεθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να βρεθεί η γωνία **Γ**.

γ) Εάν το σημείο **Α** κινείται στην ευθεία **2x+y=4** να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου **Β**.

12. Δίνεται ότι η ευθεία $|\vec{\alpha}|^2 x + |\vec{\beta}|^2 y - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$ σχηματίζει με τους άξονες

τρίγωνο εμβαδού **8** τ.μ. Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

13. Δίνεται ότι η ευθεία **(ε) : Αx+Βy+Γ=0** με **Β ≠ 2Α** εφάπτεται σε δύο ίσους κύκλους με κέντρα τα σημεία **Κ(4, 0)** και **Λ(0, 2)**.

α) Να δειχθεί ότι **2Α+Β+Γ=0**.

β) Να δειχθεί ότι η ευθεία **(ε)** διέρχεται από σταθερό σημείο.

14. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο **Κ(1, 2)** και απέχει από το σημείο **Λ(2, -1)** απόσταση ίση με **1**.

15. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : 4x-3y=5$ και $\varepsilon_2 : \lambda x+(2-\lambda)y=30$.

α) Να βρεθεί το $\lambda \in \Re$.

β) Να βρεθεί η απόσταση των ε_1 και ε_2.

16. Έστω ο κύκλος $C : x^2+y^2=41$ και το σημείο του **Α(5, 4)**. Να βρεθεί το $\lambda \in \Re$ ώστε το σημείο **Μ(λ, 2-λ)** να απέχει από την εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο **Α** απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου.

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + 3x - \psi - 4 + \lambda(x + \psi - 2) = 0,\ \lambda \in \Re$.

α) Να δειχθεί ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \Re$.

β) Να δειχθεί ότι οι κύκλοι της οικογένειας διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων.

18. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 2px$ και δύο χορδές της **ΟΒ**, **ΟΓ** τέτοιες ώστε $B\hat{O}\Gamma=90^0$. Να δειχθεί ότι η ευθεία **ΒΓ** διέρχεται από σταθερό σημείο.

19. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και έστω $M(x_0,\ y_0)$ σημείο της με θετική τεταγμένη. Εάν **Α** είναι η προβολή του **Μ** στην διευθετούσα και το τρίγωνο **ΜΑΕ** όπου **Ε** η εστία της έχει εμβαδόν **2** τ.μ. να βρεθεί το σημείο **Μ**.

20. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα διανύσματα $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ και $\left|\overrightarrow{OB}\right|$ τέτοια ώστε $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 2$, $A\hat{O}y=45^\circ$ και $B\hat{O}y=30^\circ$. Να εξετασθεί εάν το σημείο **Μ** με $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ανήκει στον άξονα **y'y**.