1. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g : $(-1, +\infty) \to R$ με $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $\Phi(x)=f(x)+g(x)$

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο O(0,0) , η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία $x = 3$

δ) Ένα υλικό σημείο Μ με θετική τετμημένη, κινείται στη C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Αν Ν είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x′x και Α(0,α) σημείο του άξονα y′y, με $\alpha > 0$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής $E'(t)$ του εμβαδού Ε του τριγώνου ΑΜΝ κάθε χρονική στιγμή t ισούται με $\Phi(x(t))$

ii) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ είναι ίσος με $(2\ln 3 + \frac{8}{9})$ cm^2 / sec

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x}$, $x \le 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Ένα υλικό σημείο $A(\alpha , \sqrt{-\alpha})$, $\alpha < 0$ κινείται στην C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $\alpha'(t)=-\alpha(t)$. Επίσης υλικό σημείο M(x,y) με $x > 0$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y = x$

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $A\hat{O}M = \theta$, όπου Ο η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $(OA) = \sqrt{2}$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις: $y = \sqrt{-x}$ με $x \le 0$, $y = x$ με $x \ge 0$ και την $y = \alpha'(t_0)$

iii) Να βρείτε ευθεία παράλληλη με τον άξονα y΄y , η οποία να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f :(1 ,+ \infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$f(e^x + 1) = x + e^x + 1$, για κάθε $x \in R$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x \in (1 ,+ \infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.

δ) Να υπολογίσετε το $f(e^2 + 1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x + 1)-1 = f^{-1}(e^2 + 3)$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(R)= R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$e^{2f(x)}+e^{f(x)+1}+ f(x)- 2e^2 = x$, για κάθε $x \in R$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $e^{\xi} + e = (2e^2 - \xi)e^{-\xi}$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le x$ και να αποδείξετε ότι $f(x) - 1 \ge 0$ για κάθε $x \ge 1$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x\ln x-x}$, $x>0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x}=\kappa$, $x>0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa>0$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln x\cdot f(x)dx=\frac{e-1}{e}$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 ξ_2 $\in(e^{-1}, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi_1)\cdot\ln\xi_1+ef(\xi_2)\cdot\ln\xi_2=\frac{e-e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\ln x|$, $x>0$

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και να βρείτε την παράγωγό της.

β) Να βρείτε:

i) Τα κοινά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της C_f με την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha>0$

ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_A και ε_B της C_f στα σημεία της $A(e^{\alpha}, \alpha)$ και $B(e^{-\alpha}, \alpha)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\alpha>0$

γ) Έστω Μ και Ν τα σημεία τομής της ευθείας ε_B με τους άξονες x'x και y'y αντιστοίχως.
Να αποδείξετε ότι, όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ γίνεται μέγιστο, η ευθεία ε_A διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0)

7. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο A(0,1).

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu^2 x)-1}{\eta\mu x}$

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f^2(2016x)-1}{x}=4032f'(0)$

β) Αν επιπλέον για την f ισχύει $f^2(x)-8f(x)=x^2-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της.

γ) Αν $f(x)=4-\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

i) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται από το σημείο $B(-1,3)$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx<\frac{22}{5}$

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f'(x) = 4f(x) + 32x^2 - 16x$ για κάθε $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{4x} - 8x^2$, $x \in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $4f(2x) < 3f(x) + f(5x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

δ) Να αποδείξετε ότι $(e^2 - 2)\ln 2 < \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\, dt < (e^4 - 8)\ln 2$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\, dt - (x-1)(3f(x) + f(5x) - 4f(2x)) = (e^{4x} - 2)\ln 4x$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 0$
- $|f'(x)| \le 1$ για κάθε $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι $-2 \le f(2) \le 2$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{2}, +\infty)$

γ) Αν $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in R$

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή $y = x^2$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to +\infty} (e^{f(x)} - 1)(f(x) - 2\ln x)$

iii) Αν $g: R \to R$ είναι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο M(1, 0) και για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τη σχέση $g''(x) = \frac{8x}{e^{f(x^2)}}$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 g(x)\,dx = f(1)$

10. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x + 1, \text{ για κάθε } x \in R \quad (1)$$

α) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f για $x = -1$ και $x = 1$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

δ) Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} f(\alpha)\, f(\frac{1}{\alpha}) < 1 + \frac{1}{\alpha}$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\eta\mu x + 2)}{e^x - 1} = \frac{f(x)}{x+2}$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

στ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = 1$ είναι $E(\Omega) = \frac{5}{4}$

11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1,+\infty) \to R$, με $f(e) = 1$, η οποία για κάθε $x \in (1,+\infty)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) > 0$
- $xf'(x) + f^2(x) = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, \frac{\pi}{2})$

γ) Ένα υλικό σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 1$ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα 4α cm/sec
Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο Α, τότε:

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Α, τη χρονική στιγμή t_0, που το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $(e, f(e))$

ii) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x\,x'$, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\theta'(t\ ) = \frac{12e}{e^2+1}$ rad/sec

12. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση
$$(2x^2 + 1)e^{2x^2-x-1} = x + 2$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (\frac{1}{e}, 1)$ τέτοια, ώστε $\frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = e - 1$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και την ευθεία $x = e$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)+1}{e^x}dx < \frac{4}{3}$