1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .
2. Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$
3. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g : R \to R$ η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$.
   α. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα .
   β. Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$
4. Να λύσετε την ανίσωση $(gof)(x) > 0$
5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $M(e , 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο M

2. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x+2)-5}{x-1} = 6$

α) Να αποδείξετε ότι:
   i) $f(3) = 5$ και ii) $f'(3) = 6$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+2-f(x)}{ημ(x-3)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7συνx$, $x \in R$, τέμνει τον άξονα x'x τουλάχιστον σε ένα σημείο.

δ) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : R \to R$, για την οποία ισχύει $g'(x) \le f'(3)$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

3. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0 , 8] \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση
$f^3(x) + f(x) = x + 2 \quad (1)$
για κάθε $x \in [0 , 8]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) $f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{3}{2}$

γ) Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_{f-1} των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του .

4. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(2x+1)-7}{x-1} = 10$

1) Να αποδείξετε ότι : α) $f(3) = 7$ β) $f'(3) = 5$
2) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$
   α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = 5x - 8$
   β) Ένα σημείο Σ , που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3 , κινείται στην ευθεία (ε) Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2m/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ .

5. Δίνονται :

- Η ευθεία (ε) : $y = x - e$
- Η συνάρτηση $g(x) = x\ln x - x$ και
- Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R , τέτοια ώστε $f'(\ln x) = x\ln x$, για κάθε $x \in (0 , +\infty)$

Να αποδείξετε ότι :

α) Η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_g .

β) i) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0 , -1)$ τότε ισχύει $f(x) = g(e^x)$, $x \in R$
   ii) Για κάθε $x \in (0 , 1)$, ισχύει $-1 < f(x) < xe - 1$

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $[0, +\infty) \to R$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο α με $α > 0$ και ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(xy) = f(x)\, f(y)$ για κάθε $x, y > 0$
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$

Α. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(1) = 1$ και $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$

β. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$

γ. η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{αf'(α)}{f(α)}$ για κάθε $x > 0$

Β. Αν η ευθεία ε : $x - 2\sqrt{α} \cdot y + α = 0$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(α, f(α))$, να βρείτε τον τύπο της f .

7. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια , ώστε $f^3(x) + 3f(x) = x^5 + x + 1$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R .

β. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $ρ \in (-1, 0)$.

γ. Η f αντιστρέφεται .

δ. Το σημείο $N(0, ρ) \in C_{f^{-1}}$.

ε. Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

8. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(R) = R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $συν^2 f(x) + 4f(x) = x$ για κάθε $x \in R$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = ημx$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-\frac{π}{4}, 0)$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - λx + 1$, $x > 0$, $λ > 0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Έστω Μ το σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο της C_f . Να βρείτε , για τις διάφορες τιμές του λ , τη καμπύλη στην οποία κινείται το Μ .

iii. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ , ώστε να ισχύει $\ln x \leq λx - 1$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, e) \to R$ με $f(1) = 0$ η οποία για κάθε $x \in (0, e)$ ικανοποιεί τη σχέση $\ln(f'(x)) = f(x) - \ln x$.

Α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Β. Αν $f(x) = -\ln(1 - \ln x)$, $x \in (0, e)$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος .

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 - \ln x = \frac{1}{e^α}$, για τις διάφορες τιμές του $α \in R$

11. A. Να αποδείξετε ότι , αν μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 και συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ

B. Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν $f'(2) > 0$, $f^{(3)}(2) > 0$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x) + f(4 - x) = 3$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η f′′ είναι γνησίως μονότονη .

β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής .

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο R.

δ. Αν η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Μ , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Μ σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45^0

ε. Για $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\,f(x + 1) = f(x) + f(x + 2)$ είναι αδύνατη

12. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \quad \text{για κάθε } x \in R .$$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την κυρτότητα .

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R .

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x + 2010) - f(x))$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{|1 - \ln x|}{x}$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Αν η τετμημένη του σημείου $M(x , f(x))$ μεταβάλλεται με ρυθμό 1μ/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E(t) του τριγώνου ΑΟΒ , όπου $A(x , 0)$, $O(0 , 0)$, $B(0 , f(x))$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0) = 4$

γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση (1 , 1) , τότε να αποδείξετε ότι:

i) $x(t) = t + 1$

ii) Η συνάρτηση E(t) είναι κοίλη στο διάστημα $[e - 1 , +\infty)$

14. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα (0 , 1] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (0 , 1) , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) = 0$ και
- $2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \dfrac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x \in (0 , 1)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0 , 1]$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) το όριο $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \cdot f^{-1}(x))$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $M(x_o , f(x_o))$ με $x_o \in (0 , 1)$

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

15. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$
- $(3x^2 f^2(x) - 1)f'(x) + xf''(x) = 0$, για κάθε $x \neq 0$
- $f(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $f'(1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(5x)$

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $f^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) f(\beta)$ για $1 < \alpha < \beta$

16. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(1) = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$ και
- $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \dfrac{\alpha x}{y}$ για κάθε $x, y > 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \alpha x$, $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e, f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α για την οποία ισχύει $f(x) \le 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

δ) Αν $g(x) = -\dfrac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x})$, $x \in R$, $\alpha > 0$, να βρείτε τη τιμή του α ώστε η ελάχιστη τιμή της g να γίνεται μέγιστη.

17. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ικανοποιεί τη σχέση: $f'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in R^*$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

18. Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) = (\alpha + 1)^x - \alpha^x$, $\alpha > 1$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f , για τις διάφορες τιμές του $x \in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα $[0 , +\infty)$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

δ) Να λύσετε το σύστημα $3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19$

19. Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(x) \geq e^x$, για κάθε $x \in R$
- $f(x)\, f(-x) = 1$, για κάθε $x \in R$

α. Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in R$

β. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in (0 , +\infty)$

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

iii. Αν για τους θετικούς αριθμούς α , β , γ ισχύει $\ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\alpha+\gamma} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$

20. Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0 , +\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(f'(x)) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0 , +\infty)$
- $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0 , +\infty)$
- $f(1) = 0$

α. i. Να βρείτε το $f'(1)$

ii. Να αποδείξετε ότι $f'(f'(x)) = x$, $x \in (0 , +\infty)$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0 , +\infty)$

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in R$ η ευθεία ε: $y = x + \kappa$ έχει δυο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

δ. Αν $\kappa < -1$ και $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta , f(\beta))$ με $\alpha < \beta$, τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$ τέτοιο , ώστε $\alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$

21. Έστω η συνάρτηση $f : [2 , +\infty) \to R$ με $f(2) = 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2 , +\infty)$ και κυρτή στο $(2 , +\infty)$, τότε :

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2 , +\infty)$

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x - 9)f(x + 6) = (7x - 32)f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4 , 5)$

Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3} = \dfrac{1}{6}$

γ. i. Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f'(3)$

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

22. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + x + \alpha$ και $g(x) = \dfrac{x\ln x}{x+\alpha}$, όπου $\alpha > 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα ρ

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) \geq -\dfrac{\rho}{\alpha}$ για κάθε $x > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha(x\ln x - \lambda) = \lambda x$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$

23. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) + f(-1) = 0$ και
- $f'(x) = \sqrt{16+f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $(f'(x) + f(x))e^{-x}$ είναι σταθερή στο R

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2(e^x - e^{-x})$, $x \in R$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη συνάρτηση της f

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_{0}^{3} \ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\,dx = 3\ln 2 - 1$

24. Έστω συνάρτηση $f(0, +\infty) \to R$ τέτοια ώστε :

- Για κάθε $x > 0$, $y > 0$ ισχύει $f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1) = 1$.

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{f(xh)-f(x)}{xh-x} = \dfrac{2f(x)}{x} + x$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(x) = x^2\ln x$

iv. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

v. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$

25. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) + 2xf(x) = 1$, για κάθε $x \in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R .

Β. Αν $f(0) = 1$, τότε :

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, $x \in R$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu f(x))$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε. Να αποδείξετε ότι $\int_{1}^{0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(\sqrt{2} - 1)$.

26. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) \geq xe^{2x}$ για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^2(x)}{x\eta\mu x} = 1$

γ. Αν $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα [0 , 1] .

27. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $[0, +\infty)\to R$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $4f''(x)\,(f(x))^3 = -1$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$
- $2f'(1) = f(1) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $(2f(x)\,f'(x))^2 = 1$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, τότε :

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(\alpha , f(\alpha))$, με $\alpha > 0$.

ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα x΄x

iii) Αν ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι , ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες .

iv) Να βρείτε $\lambda\in(-\alpha , \alpha)$ τέτοιο , ώστε η ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία .

28. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(R) = (0, +\infty)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)\,f(-x) = 1$ για κάθε $x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R .

β) Η f είναι κυρτή στο R .

γ) Η $g(x) = f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \dfrac{f(-x)}{f(x)}\,dx = \dfrac{f^2(0)-f^2(-1)}{2}$

Γ) Αν $f(0) = 1$ να βρείτε τη συνάρτηση f .

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, x > 0

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$

ii. Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = (1 + \frac{1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}$, x > 0 και g(0) = 0 .

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [0 , 1] .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 g(x)\,dx$

30. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$
- $f'(x) = \dfrac{(1+e^x)f(x)}{1+f(x)}$ για κάθε $x \in R$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in R$

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$g(x) = x\, f(\frac{1}{x})$, $x \in R^*$

γ. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha+2\beta}{3} < \ln(\dfrac{e^\alpha+2e^\beta}{3})$ για κάθε α , β ∈ R με α < β

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την παραβολή $y = x^2 + 1$ και την ευθεία $x = 1$