ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B, να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X, αν $\bar{x} > 0$, και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντοτε πεδίο ορισμού το A.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

γ) Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X, ισχύει ότι $0 \le f_i \le 1$.

δ) Η τυπική απόκλιση s των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι μέτρο θέσης.

ε) Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται μόνο όταν τα A, B πραγματοποιούνται συγχρόνως.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-4,\ x\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2,0)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=3$.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to -2}\frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν συνδρομητών μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας. Για τον μήνα Μάιο, οι χρόνοι ομιλίας (σε ώρες) που έχουν χρεωθεί οι συνδρομητές του δείγματος έχουν χωριστεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Δίνεται ότι:

- Η μικρότερη διάρκεια χρόνου ομιλίας που παρατηρήθηκε στο δείγμα είναι μηδέν.
- Το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση ισούται με 36°.
- $\frac{N_1}{4}=\frac{N_2}{9}=\frac{N_3}{15}=\frac{N_4}{18}$, όπου N_1, N_2, N_3 και N_4 είναι οι αθροιστικές συχνότητες της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης αντίστοιχα.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος **c** της κάθε κλάσης είναι 4.

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα **Ι** συμπληρωμένο, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές x_i**	**Σχετικές συχνότητες f_i%**
[,)		
[,)		
[,)		
[,)		
[,)		
	Σύνολο	

Πίνακας **Ι**

Μονάδες 10

Για τα ερωτήματα Γ3 και Γ4, δίνεται ότι $f_1\%=20$, $f_2\%=25$, $f_3\%=30$, $f_4\%=15$ και $f_5\%=10$.

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών του δείγματος οι οποίοι έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας.

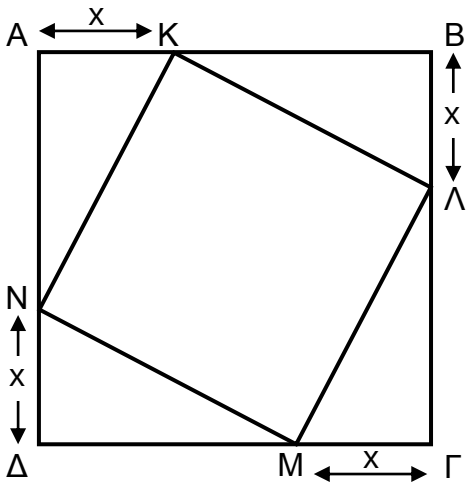
Μονάδες 5

Γ4. Υποθέτουμε ότι οι συνδρομητές της εταιρείας δικαιούνται κάθε μήνα μέχρι 4 ώρες δωρεάν χρόνο ομιλίας. Έτσι, πληρώνουν μόνο για το χρόνο ομιλίας που τους έχει χρεωθεί επιπλέον των 4 ωρών. Αφαιρούμε από το δείγμα τους συνδρομητές που χρεώθηκαν λιγότερες από 4 ώρες. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του χρόνου (σε ώρες) που πλήρωσαν οι υπόλοιποι συνδρομητές του δείγματος τον μήνα Μάιο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ = x, όπως φαίνεται στο Σχήμα **Ι**.



Σχήμα **Ι**

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΚΛΜΝ, ως συνάρτηση του x, είναι:

$$E(x) = 2(x^2 - 4x + 8), \quad x \in (0, 4).$$

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν Ε(x) γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 4

Δ3. Θεωρούμε τις τιμές $y_i = E(x_i)$, $x_i \in (0,4)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 19$, έτσι ώστε:

- Τα x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, 19$ είναι διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους.
- Η μέση τιμή των x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, 19$ και η διάμεσός τους είναι ίσες με 2.
- Η μέση τιμή των y_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, 19$ είναι ίση με $8{,}02$.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2, $i = 1, 2, 3, \ldots, 19$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση s_x των x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, 19$ και να εξετάσετε αν το δείγμα τους είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $s^2 = \dfrac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{v} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v}\right\}$, όπου t_i, $i = 1, 2, \ldots, v$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής.

(Μονάδες 5)

γ) Επιλέγουμε τυχαία μία από τις τιμές x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, 19$. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :

$A = \{ x_i, i = 1, 2, 3, \ldots, 19,$ έτσι ώστε $x_i^2 \geq 4 \}$,

$B = \{ x_i, i = 1, 2, 3, \ldots, 19,$ έτσι ώστε $E(x_i) \leq 8 \}$ και

Γ: «Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

(Μονάδες 6)

Μονάδες 17

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ